Naravna in cela števila

1 Osnovni pojmi

2 Naravna števila in računanje z njimi

3 Cela števila in računanje z njimi

4 Potence z naravnimi eksponenti

5 Deljivost naravnih števil

6 Algebrski izrazi

DELOVNA RAZLIČICA

1. Osnovni pojmi

Na kratko poglejmo, kaj že vemo o množici naravnih in celih števil.

1.1 Število, številka in števka

Številsko vrednost, ki jo imamo v mislih, imenujemo **število**. Ko število zapišemo s simbolom, je to **številka**. Simboli, ki jih uporabljamo za zapis števil, so **števke** ali **cifre** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 9.

Zgleda

A. Košarkar Luka Dončić ima na dresu kluba Dallas Mavericks napisano številko 77. Zapisana je z dvema enakima števkama 7.

B. Vse košarkarje ekipe na parketu lahko preštejemo na prste ene roke. Teh je pet (5).

Nalogi

1. Zapišite svojo številko čevlja, EMŠO in hišno številko.

____

2. S sošolcem oziroma sošolko zapišita današnji datum ter vajina datuma rojstva.

Današnji datum: ____________________

Moj rojstni datum: ____________________

Rojstni datum sošolca/sošolke: ____________

1.2 Desetiški zapis števil

Osnovna pravila za zapis števil z besedo

- Glavne števnike do 100 pišemo skupaj (šestnajst, petintrideset …).
- Stotice pišemo skupaj (sto, dvesto, devetsto …).
- Preostala števila pišemo narazen (dva milijona, dva tisoč petsto osemnajst …).

Zgled

Krištof Kolumb je odkril Ameriko leta 1492 (tisoč štiristo dvaindevetdeset).

Za vsako števko v tej številki je pomembno, na katerem mestu stoji. Prvo mesto na desni pomeni enice, drugo po vrsti desetice, tretje tisočice, četrto deset tisočice … Število 1492 je torej sestavljeno iz dveh enic, devet desetic, štirih stotic in ene tisočice.

Števka 4 v številki 1492 pomeni štiristo (400).

V desetiškem številskem sistemu uporabljamo za zapis števil deset števk. V zapisu števila je vrednost števke določena z mestom, na katerem se števka nahaja, zato je pomemben vrstni red zapisa števk.

Desetiške enote	Milijonice	Stotisočice	Desettisočice	Tisočice	Stotice	Desetice	Enice
Oznaka	M	St	Dt	T	S	D	E
Vrednost	1000 000	100 000	10 000	1000	100	10	1
Zapis s potenco števila 10	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1

Naloge

3. Z besedami zapišite letnico letošnjega leta.

____

4. Napišite številko bančnega računa na kartici ter števke na mestu enic, stotic, tisočic in desettisočic tega števila.

Številka računa: ______________________________

Število enic: ______________________________

Število stotic: ______________________________

Število tisočic: ______________________________

Število desettisočic: ______________________________

5. Dana so števila 7, 20, 72, 251 in 8327.

a) Izpišite števili, ki imata na mestu enic števko 7. ______________________________

b) Izpišite števili, ki imata na mestu desetic števko 2. ______________________________

c) Katera števka je v trimestnem številu na mestu stotic? ______________________________

1.3 Sodost in lihost

Soda števila so števila, ki imajo na mestu enic števko 0, 2, 4, 6 ali 8.
Množico vseh sodih števil zapišemo $\{2n, n \in \mathbb{N}\}$.

Liha števila so števila, ki imajo na mestu enic števko 1, 3, 5, 7 ali 9.
Množico vseh lihih števil zapišemo $\{2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$.

Zgled

Zapišimo vsa

a) soda števila, večja od 841 in manjša od 854: 842, 844, 846, 848, 850, 852.

b) liha števila, večja od 197 in manjša od 210: 199, 201, 203, 205, 207, 209.

Preizkusi zdaj!

Nalogi

6. Naštetih je nekaj števil. Podčrtajte vsa soda števila.
241, 4322, 540, 377, 2000, 784, 315

7. Iz listkov s števkami 0, 3, 4 in 7 sestavite vsa možna dvomestna in trimestna liha števila. Števka 0 ne sme biti na prvem mestu.

0 3 4 7

Dvomestna števila: ______________________________

Trimestna števila: ______________________________

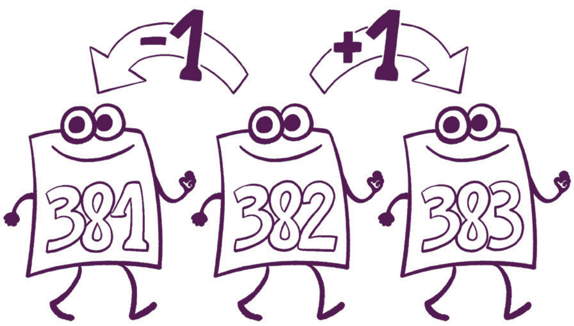
____

1.4 Predhodnik in naslednik števila

Predhodnik naravnega števila *n* je za 1 manjše število, **naslednik** danega števila *n* je za 1 večje število.

Zgled

Število 831 je predhodnik števila 832, 833 pa naslednik števila 832.



Naloga

8. Dopolnite preglednico.

Predhodnik	/	2		9999	
Število			55		
Naslednik	2				34 601

DELOVNA RAZLIČICA

1.5 Zaokroževanje števil

Zgled

V spletni trgovini stanejo hlače 26 evrov. Oče pravi, da hlače stanejo približno 30 evrov, sin pa vztraja, da stanejo približno 20 evrov. Kdo ima prav?

Iz spodnjih pravil vidimo, da ima prav oče.

Preizkusi zdaj!

Pravila zaokroževanja

Število lahko zaokrožimo na poljubno desetiško enoto.
Število zaokrožimo navzgor, če je za mestom zaokrožitve števka 5, 6, 7, 8 ali 9.
Število zaokrožimo navzdol, če je za mestom zaokrožitve števka 0, 1, 2, 3 ali 4.
Med številom in zaokroženim številom zapišemo simbol za približno vrednost $\doteq$.

Naloge

Preizkusi zdaj!

9. Zaokrožite število 9835 na desetice, stotice in tisočice.

9835 $\doteq$ ____________ 9835 $\doteq$ ____________ 9835 $\doteq$ ____________

10. Nebotičnik *Stolp federacije* je visok 374 m. Novinar je objavil podatek, da je visok približno 380 m. Ali je novinarjeva trditev matematično pravilna? Utemeljite odgovor.

____

11. Od leta 2010 je najvišja zgradba na svetu Burj Khalifa v Dubaju v Združenih arabskih emiratih z višino 828 m. Zaokrožite to število na desetice.

828 $\doteq$ ____________

12. Znana filmska igralka je kupila hišo za 2745 350 evrov. Kupnino je zaokrožila na milijonice. Obkrožite pravilno zaokroženo vrednost.

(A) 2700 000 (B) 3000 000 (C) 2800 000

13. Dopolnite preglednico.

Število	Zaokroženo na					
	milijonice	stotisočice	desettisočice	tisočice	stotice	desetice
12 689 233	13 000 000	12 700 000	12 690 000	12 689 000	12 689 200	12 689 230
90 256 148						
6821 537						
735 912						
5286						

1.6 Poimenovanje računskih operacij

Seštevanje	a	$+$	b	$=$	c
	seštevanec (sumand)		seštevanec (sumand)		vsota (suma)
Odštevanje	a	$-$	b	$=$	c
	zmanjševanec (minuend)		odštevanec (subtrahend)		razlika (diferenca)
Množenje	a	$\cdot$	b	$=$	c
	množenec (faktor)		množitelj (faktor)		zmnožek (produkt)
Deljenje	a	$:$	b	$=$	c
	deljenec (dividend)		delitelj (divizor)		količnik (kvocient)

Če je rezultat iz iste številske množice kot števili, rečemo, da je računska operacija med številoma **notranja**.

Nalogi

14. Izračunajte:

a) razliko, če je odštevanec 83 in zmanjševanec 172. ______________________

b) vsoto, če sta seštevanca 231 in 507. ______________________

c) produkt, če sta faktorja 31 in 46. ______________________

15. Dopolnite preglednico.

Deljenec	Delitelj	Količnik
72		6
	36	4

Več vadim, bolje znam

1. Dana so števila 27, 44, 100, 122, 333 in 652.

a) Izpišite števila, ki imajo na mestu desetic števko 2. ______________________

b) Izpišite soda števila. ______________________

c) Trimestna števila zaokrožite na stotice. ______________________

č) Največje število zapišite z besedo. ______________________

d) Katero število lahko zapišete s potenco števila 10? ______________________

Zapišite ga s potenco števila 10. ______________________

DELOVNA RAZLIČICA

2. Izračunajte vsoto, razliko, zmnožek in količnik parov števil.

Števili	Vsota	Razlika	Zmnožek	Količnik
156 in 12				
242 in 22				
315 in 3				

3. Ali so izjave pravilne? Obkroži DA ali NE.

a) Število 11 je sestavljeno iz dveh enakih števk. DA NE

b) Predhodnik števila 100 je 99. DA NE

c) Če število 3456 zaokrožimo na stotice, dobimo 3400. DA NE

č) Števili 202 in 27 sta sodi števili. DA NE

d) Predhodnik sodega števila je liho število. DA NE

4. Zaokrožite števila.

Število	Zaokroženo na					
	milijonice	stotisočice	desettisočice	tisočice	stotice	desetice
47 649						
529 135						
1918 522						
2581 736						

* **5.** Število smo zaokrožili na tisočice in dobili 217 000. Zapišite najmanjše in največje možno število, ki smo ga zaokrožili.

Najmanjše število: ____________ Največje število: ____________

2. Naravna števila in računanje z njimi

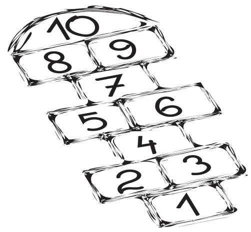
2.1 Množica naravnih števil ℕ

Naravna števila so števila, s katerimi štejemo. Ker ima vsako naravno število naslednika, ni največjega naravnega števila. Zato je naravnih števil neskončno mnogo.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$$

Zgled

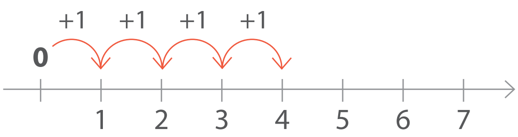
Pri igri *ristanc* uporabljamo množico prvih desetih naravnih števil {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.



Za oznako ure potrebujemo množico prvih dvanajstih naravnih števil {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

Obe množici sta končni. Elemente končne množice vedno lahko preštejemo.

Naravna števila lahko upodobimo kot točke na številski premici. Številu 1 ustreza točka, ki je za eno enoto oddaljena od izhodišča v desno, številu 2 točka, ki je od izhodišča za dve enoti oddaljena v desno …



Nalogi

1. Število, ki ponazarja vaš mesec rojstva, zapišite s številko in z besedo ter ga upodobite na številski premici.

Številka: ____________ Beseda: ______________________

2. Na številskem traku s točkami upodobite:

a) naravna liha števila, manjša od 7.

Preizkusi zdaj!

b) soda naravna števila med 3 in 9.

c) vsa naravna števila med vključno 2 in vključno 5.

2.2 Seštevanje

Če dve naravni števili seštejemo, spet dobimo naravno število. Računska operacija je notranja.

$$a + b = c$$

Zgled

Pevka Maya je odprla nov profil na Instagramu. V prvem tednu ji je začelo slediti 150 sledilcev, v drugem tednu 281 novih in v tretjem tednu še naslednjih 519.

Izračunajmo, koliko sledilcev je imel njen profil v prvih dveh tednih.

$150 + 281 = 431$ ali $281 + 150 = 431$

Pri seštevanju lahko seštevanca zamenjamo in dobimo isti rezultat.

Koliko sledilcev je imel Mayin profil po treh tednih?

$(150 + 281) + 519 = 431 + 519 = 950$ ali $150 + (281 + 519) = 150 + 800 = 950$

Ker lahko naenkrat seštejemo le dve števili, se pri seštevanju treh števil lahko vprašamo, kateri dve sešteti najprej. Vseeno je, saj v vsakem primeru dobimo isti rezultat.

Nalogi

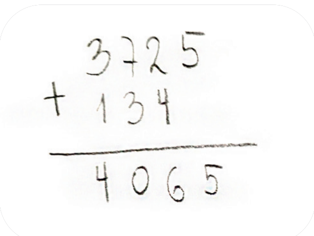
3. Spretno izračunajte vrednost izrazov.

a) $229 + 58 + 42 =$ ____________________

b) $15 + 88 + 45 + 22 =$ ____________________

4. Simon je prvi dan nabral 37 jabolk, drugi dan 44 jabolk in tretji dan 33 jabolk. Koliko jabolk je nabral v vseh treh dneh skupaj?

5. Žan je pri pisnem seštevanju naredil napaki. Opiši, kaj je naredil narobe.



____

____

____

DELOVNA RAZLIČICA

2.3 Množenje

Če dve naravni števili zmnožimo, spet dobimo naravno število. Računska operacija je notranja.

$$a \cdot b = c$$

Zgleda

A. Matej je izdelal trodelno omaro. V vsakem delu so 4 predali. Koliko predalov je v omari?

$3 \cdot 4 = 12$ ali $4 \cdot 3 = 12$

Pri množenju lahko množenca zamenjamo in dobimo isti rezultat.

Matej bo v vsak predal pospravil 2 škatli. Izračunajmo, koliko bo vseh škatel v omari.

$(3 \cdot 4) \cdot 2 = 24$ ali $3 \cdot (4 \cdot 2) = 3 \cdot 8 = 24$

Ker lahko naenkrat zmnožimo le dve števili, se pri množenju treh števil lahko vprašamo, kateri dve zmnožiti najprej.

Tudi v tem primeru rezultat ni odvisen od tega, kateri dve števili zmnožimo prej.

B. Tian je kupil 8 zvezkov po 2 evra in 7 pisal po 2 evra. Izračunajmo, koliko je plačal za šolske potrebščine.

$8 \cdot 2 + 7 \cdot 2 = 16 + 14 = 30$ ali $(8 + 7) \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 30$

Ker sta ceni zvezka in pisala enaki, lahko rezultat (končno ceno) dobimo na dva načina.

- Množimo vsakega od seštevancev z množiteljem in potem seštejemo zmnožka.
- Najprej izračunamo vsoto in jo potem množimo z množiteljem.

Nalogi

6. Spretno izračunajte izraze.

a) $8 \cdot 52 =$ ____________________

b) $19 \cdot 4 \cdot 25 =$ ____________________

c) $50 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 6 =$ ____________________

č) $17 \cdot 8 + 17 \cdot 9 =$ ____________________

7. Dijaki in dijakinje so odšli na končni izlet s tremi avtobusi. Na vsakem avtobusu je bilo 24 deklet, 23 fantov in 3 profesorji. Koliko oseb je odšlo na končni izlet?

DELOVNA RAZLIČICA

Pravila računanja, ki smo jih spoznali na primerih in veljajo za vsa števila, so osnovni računski zakoni.

Osnovni računski zakoni

Zakon o zamenjavi seštevancev	$a + b = b + a$
Zakon o združevanju seštevancev	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Zakon o zamenjavi množencev	$a \cdot b = b \cdot a$
Zakon o združevanju množencev	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Zakon o razčlenjevanju	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Če zakon o razčlenjevanju preberemo v obratnem vrstnem redu, dobimo **pravilo za izpostavljanje skupnega faktorja**:

$$a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c.$$

2.4 Številski izrazi

Pri računanju vrednosti številskih izrazov moramo paziti na vrstni red računskih operacij.

- Množenje ima prednost pred seštevanjem.
- Če so v izrazu oklepaji, najprej izračunamo vrednost izrazov v oklepajih.

Zgleda

A. Izračunajmo vrednost številskih izrazov.
Paziti moramo na vrstni red računskih operacij.

$\underline{7 \cdot 3} + 12 + \underline{16 \cdot 5} =$

$= 21 + 12 + 80 =$

$= 113$

$2 + 1 \cdot 3\left(2 + 4\left(3 + 2 \cdot 2(5 + \underline{2 \cdot 8})\right)\right) =$

$= 2 + 1 \cdot 3\left(2 + 4\left(3 + 2 \cdot \underline{2 \cdot 21}\right)\right) =$

$= 2 + 1 \cdot 3\left(32 + 4\left(\underline{3 + 84}\right)\right) =$

$= 2 + 1 \cdot 3\left(2 + \underline{4 \cdot 87}\right) =$

$= 2 + 1 \cdot 3\,(\underline{2 + 348}) =$

$= 2 + \underline{1 \cdot 3 \cdot 350} =$

$= 2 + 1050 =$

$= 1052$

Preizkusi zdaj!

B. Izračunajmo $(12 + 5) \cdot 7$ na dva načina.

$(12 + 5) \cdot 7 = 17 \cdot 7 = 119$

$(12 + 5) \cdot 7 = 12 \cdot 7 + 5 \cdot 7 = 84 + 35 = 119$

Naloga

8. Izračunajte.

a) $800 + 22 + 20 =$

b) $44 + (55 + 99) =$

c) $7 + 3 \cdot 10 =$

č) $22 \cdot 2 + 15 \cdot 4 =$

d) $63 + (12 + 3 \cdot 9) =$

e) $4 \cdot (1 + 6) + (19 + 11) \cdot 3 =$

f) $102 \cdot 5 + 3 \cdot (7 + 3 \cdot 4 + 1) =$

g) $(54 + 6) \cdot (3 + 3 \cdot 3) =$

h) $10 + (6 \cdot (2 + 3) + (8 + 15) + (1 + 2 + 7) \cdot 9) =$

i) $(20 + 10) \cdot (5 + 3 + 6 \cdot 2) + 45 + 4(6 + 2 \cdot (7 + 1)) + 2 \cdot 4 =$

DELOVNA RAZLIČICA

Več vadim, bolje znam

1. Izračunajte, kot kaže primer.

$24 + 17 + 46 + 33 = (24 + 46) + (17 + 33) = 70 + 50 = 120$

a) $35 + 58 + 12 + 75 =$ ______

b) $51 + 82 + 29 + 18 =$ ______

c) $108 + 54 + 42 + 46 =$ ______

č) $123 + 356 + 644 + 877 =$ ______

2. Izračunajte, kot kaže primer.

$5 \cdot 13 \cdot 4 = (5 \cdot 4) \cdot 13 = 20 \cdot 13 = 260$

a) $2 \cdot 18 \cdot 5 =$ ______

b) $5 \cdot 28 \cdot 2 =$ ______

c) $25 \cdot 31 \cdot 4 =$ ______

č) $50 \cdot 71 \cdot 2 =$ ______

d) $125 \cdot 3 \cdot 8 =$ ______

3. Izračunajte.

a) $(4 + 7)(3 + 11) =$

b) $2 \cdot 4 + (2 + 12)(1 + 9) =$

c) $3 \cdot 6 + (13 + 31)(5 + 3) =$

č) $32 + (5 + 7)(3 \cdot 8 + 2) + 2 \cdot 12 =$

d) $5(3 + 7(2 + 9) + 4(3 + 1)) =$

e) $8 + 7(6 + 5(4 + 3(2 + 1))) =$

DELOVNA RAZLIČICA

4. Po besedilu zapišite izraz in izračunajte njegovo vrednost.

a) Vsota števil 5 in 9. ______

b) Produkt števil 48 in 7. ______

c) Za 7 povečano število 12. ______

č) Sedemkratnik števila 12. ______

d) Trikratnik števila 11 zmanjšajte za 15. ______

e) Produkt števila 7 in vsote števil 3 in 10. ______

f) Produkt vsote števil 12 in 23 ter vsote števil 25 in 8. ______

5. Rešite besedilne naloge.

a) Zaporedno smo vezali tri upornike z upornostjo 100 Ω, 120 Ω in 150 Ω. Kolikšna je nadomestna upornost vezja, če se vrednosti uporov seštevajo?

b) V pekarni so nakupili zaloge za naslednji mesec. Kupili so osem 10-kilogramskih vreč bele moke, šest 10-kilogramskih vreč polbele moke, pet 8-kilogramskih vreč koruzne moke ter eno 5-kilogramsko vrečo ajdove moke. Koliko znaša skupna masa kupljene moke?

c) Na kmetiji bodo opravili obvezno cepljenje goveda. Cepljenje poteka dvakrat v razmiku 3 tednov. Koliko odmerkov cepiva bo skupno prejelo 82 krav?

č) Manja bo sebi in prijateljici pobarvala lase. Za eno barvanje potrebuje 60 ml barve in 12 ml razvijalca. Kolikšna je skupna količina barve in razvijalca za obe?

d) Tone in Mirko bosta opravila sečnjo in spravilo lesa. Koliko kubičnih metrov lesa bosta spravila, če je v gozdu 32 m^3 listavcev in 21 m^3 iglavcev? Bo za prevoz tega lesa zadostovala ena vožnja vlačilca s tovorno prostornino 55 m^3?

e) Kajina omara ima 3 velike predale – vsak ima po 2 ročaja in vsak ročaj je pritrjen s 4 vijaki – in 4 majhne predale – vsak ima po en ročaj in vsak ročaj je pritrjen z 2 vijakoma. Koliko vijakov so potrebovali za pritrditev ročajev?

f) Marcel je prvi dan prebral 87 strani knjige, drugi dan 20 strani več kot prvi, tretji dan pa 15 strani več kot drugi dan. Koliko strani knjige je prebral Marcel v treh dneh?

6. Izračunajte vrednost izraza.

a) $(2 \cdot 3 + 6 \cdot 2) + 3 \cdot (2 \cdot (5 + 3) \cdot 2) \cdot 4$

b) $3 \cdot (1 + 4 \cdot 3) \cdot 2 + (4 \cdot 6 + 1) \cdot 2$

c) $(4 \cdot 3) \cdot 2 + (1 + 1) \cdot 1 + 3 + 5 \cdot 3$

č) $2 \cdot ((2 + 3) + (1 + 5)2 + (1 + 2 + 7) + 2)$

d) $3(2 + 5(6 + 7) + 2(7 + 6(2 + 5))) + 1$

e) $4 + 2 \cdot 3 + 5((7 + 1)(9 + 1) + 2 \cdot 10)$

f) $4 \cdot (1 + 6) + (19 + 11) \cdot 3$

g) $102 \cdot 5 + 3 \cdot (7 + 3 \cdot 4 + 1)$

h) $(54 + 6) \cdot (3 + 3 \cdot 3)$

i) $10 + (6 \cdot (2 + 3) + (8 + 15) + (1 + 2 + 7) \cdot 9)$

j) $(20 + 10 \cdot (5 + 3 + 6 \cdot 2) + 45 + 4(6 + 2 \cdot (7 + 1)) + 2 \cdot 4$

DELOVNA RAZLIČICA

3. Cela števila in računanje z njimi

3.1 Negativna števila

Zgled

V okolici Kočevskega Roga je bila povprečna izmerjena jutranja temperatura zraka septembra 16 °C, oktobra 9 °C, novembra 5 °C, decembra 0 °C, januarja –10 °C, februarja se je dvignila na –8 °C in marca na –5 °C.

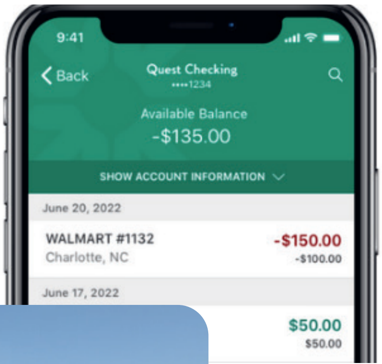
Iz zgoraj zapisanih podatkov o povprečni temperaturi lahko ugotovimo, da nekatera števila niso naravna.

Temperature, ki smo jih izmerili, upodobimo na številski premici.

Pomislimo, kje vse v vsakdanjem življenju še srečamo negativna števila.

Zgledi

A. Če smo porabili več denarja, kot ga imamo na bančnem računu, se nam izpiše negativno stanje (v rdečem). Toliko denarja moramo potem naložiti na račun, da smo v stanju nič.

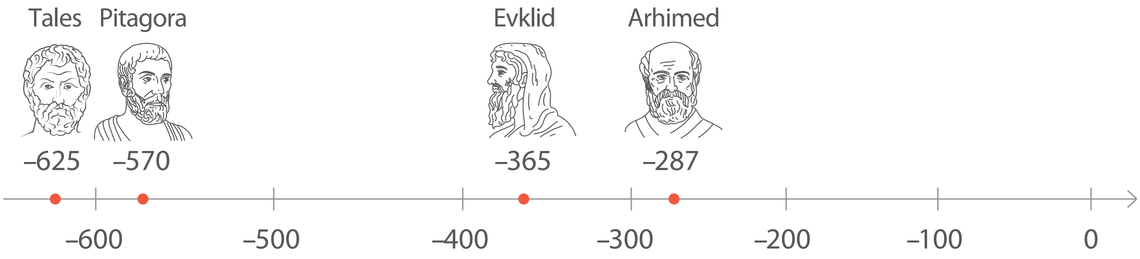


B. Ko smo na nadmorski višini 0 m, se moramo do gladine Mrtvega morja spustiti še za 422 m. Nadmorska višina mrtvega morja je namreč –422 m.

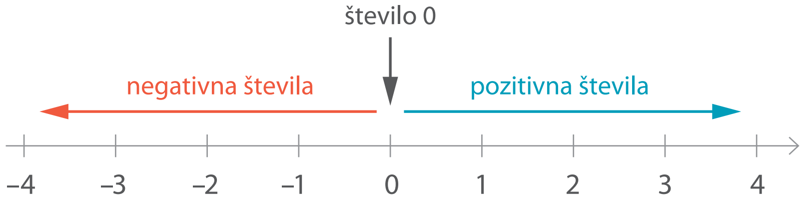
C. Nekatere stavbe imajo tudi kletne etaže. V dvigalu so etaže pod pritličjem označene z negativnimi števili.

Č. Trgovine nas z letaki v živahnih barvah opozarjajo na znižanje cen in vabijo k nakupu.

D. Za zapis štetja let v davnini lahko uporabljamo več načinov: pr. Kr. (pred Kristusom) in pr. n. št. (pred našim štetjem). Lahko pa zaradi bolj nazorne predstavitve na časovni osi pred letnico napišemo minus.



Kot smo videli, množica naravnih števil ne zadošča v vsakdanjem življenju, zato jo razširimo na **množico celih števil**.



Izhodišče je slika števila 0. Vsa naravna števila {1, 2, 3 …} so po novem pozitivna cela števila. Z zrcaljenjem njihovih slik preko izhodišča dobimo točke, ki so upodobitve negativnih celih števil {–1, –2, –3 …}.

Množica celih števil je **unija (∪)** množice negativnih celih števil ($\mathbb{Z}^-$), množice, ki vsebuje število 0, in množice pozitivnih celih števil ($\mathbb{Z}^+$).

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

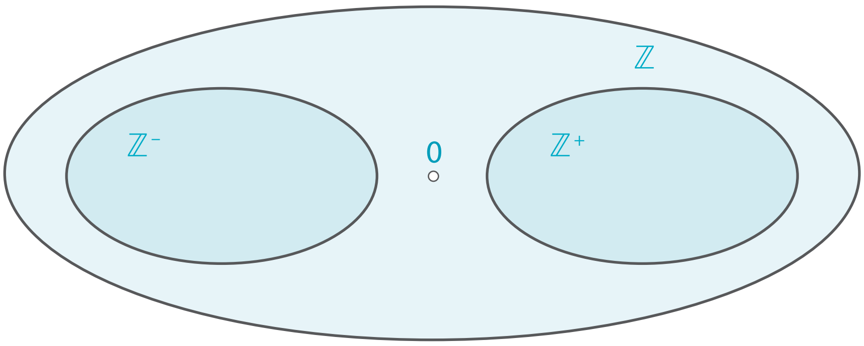
Množico lahko predstavimo tudi z naštevanjem elementov.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

Množica pozitivnih celih števil je enaka množici naravnih števil ($\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$).

Število 0 ni niti pozitivno niti negativno.

Množica naravnih števil je **podmnožica** množice celih števil: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.



Naloge

1. Zapišite s številko in predznakom + ali –.

a) Dvig 50 evrov na bankomatu. ______________________

b) Polog 120 evrov na bančni račun. ______________________

c) Popust v višini 30 %. ______________________

č) Podražitev za 20 %. ______________________

d) Starogrški matematik in filozof Pitagora se je rodil leta 570 pr. n. št. ____________

e) Slovenski matematik Jurij Vega se je rodil leta 1754. ______________________

f) Najvišje ležeče mesto leži v Peruju na 5100 m nadmorske višine. _________________

g) Januarja se je temperatura spustila za 12 °C pod ničlo. ______________________

2. Zapišite vsa cela števila, ki ležijo med:

a) –8 in 3. ____

b) –18 in –11. ____

3. Zapišite:

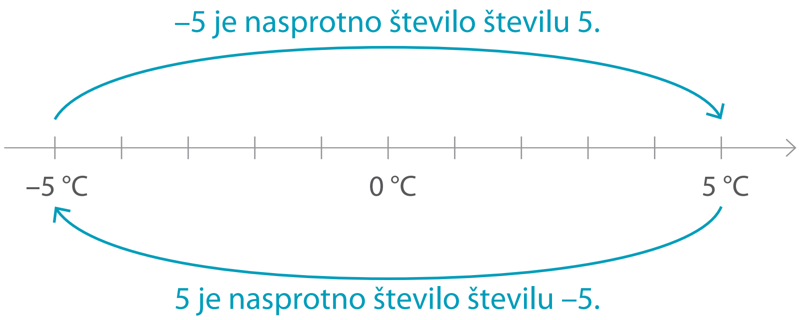
a) največje negativno celo število. ____________

b) najmanjše sodo pozitivno celo število. ____________

3.2 Nasprotno število

Števili, ki se čez 0 preslikata drugo v drugo, imenujemo **nasprotni števili**.

Zgled

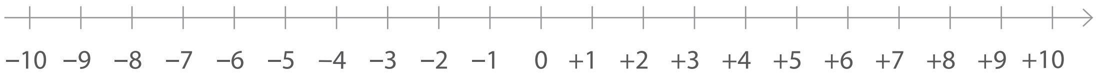


Nalogi

4. Dopolnite preglednico.

Število	5		0	
Nasprotno število		–19		1227

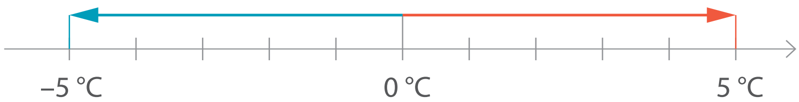
5. Na številski osi poiščite nasprotna števila številom: 2, –5, 1 in –6. Pare nasprotnih števil označite z enakimi barvami.



3.3 Absolutna vrednost

Zgled

Poglejmo, koliko se temperaturi –5 °C in 5 °C razlikujeta od 0 °C oziroma koliko sta sliki števil –5 in 5 oddaljeni od izhodišča.



Ugotovimo, da sta obe sliki enako oddaljeni od izhodišča, in sicer za 5 enot.

Oddaljenost slike števila *a* od izhodišča na številski premici imenujemo **absolutna vrednost** števila *a*.

Absolutna vrednost katerega koli celega števila, razen števila 0, je vedno **pozitivna**.

$|+a| = a$, $a > 0$ $|-a| = a$, $a > 0$ $|0| = 0$

Nasprotni števili imata **enako absolutno vrednost**, saj sta njuni sliki na številski premici enako oddaljeni od slike števila 0.

Naloga

6. Dopolnite preglednico.

Število	5	–19	0			–3718		
Absolutna vrednost števila				3	205		–12	0

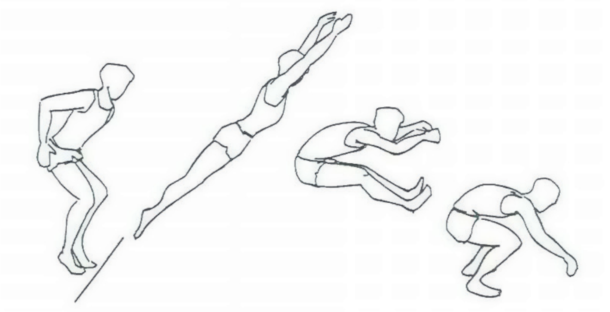
7. Primerjajte po velikosti. Vstavite znak >, < ali =.

$|-3|$ ☐ 3 $-|3|$ ☐ $|-3|$ $-|-3|$ ☐ 3 $|+3|$ ☐ $|-3|$

3.4 Primerjanje in urejanje celih števil

Zgled

Dijaki so pri športni vzgoji skakali v daljino. Bor je skočil 175 cm, Blaž 177 cm, Nace 180 cm, Nik 170 cm, Klemen 171 cm, Jure 181 cm, Matevž 182 cm in Jernej 173 cm.



Blaž je skočil dlje od Bora, ker je $177 - 175 = 2 > 0$.

Nikov skok je bil krajši od Matevževega, ker je $170 - 182 = -12 < 0$.

Uredimo dolžine skokov po vrstnem redu od najdaljšega do najkrajšega skoka:

182 cm > 181 cm > 180 cm > 177 cm > 175 cm > 173 cm > 171 cm > 170 cm.

Dve celi števili lahko **primerjamo** med seboj, zato so **cela števila urejena po velikosti**.

$a > b$ natanko tedaj, ko je $a - b > 0$.

$a < b$ natanko tedaj, ko je $a - b < 0$.

$a = b$ natanko tedaj, ko je $a - b = 0$.

Velja tudi:

- vsako negativno število je **manjše** od števila 0 in od vsakega pozitivnega števila,
- izmed dveh negativnih števil je **manjše** tisto, ki je od števila 0 **bolj oddaljeno** oz. ki ima večjo absolutno vrednost.

Naloge

8. Primerjajte po velikosti. Vstavite znak <, > ali =.

333	☐	3333	−111	☐	−112	212	☐	211
−12	☐	0	−15	☐	−25	−(−3)	☐	3
−1234	☐	+(+1234)	|−8|	☐	8	−|+16|	☐	+|−16|

9. Uredite števila po velikosti od najmanjšega do največjega.

a) −111, 111, −1111, 11111, 11, −11 ________________________

b) 235, 0, 512, −125, −123, −213, 555 ________________________

10. Katera števka se skriva pod packo, če veš, da je trditev pravilna? Zapišite vse možne rešitve.

a) 125☀5 < 12555 ____________________

b) –312 > –3☀2 ____________________

c) 555 < 5☀5 ____________________

3.5 Računske operacije v množici celih števil

Zgled

V množici naravnih števil od števila 5 ne moremo odšteti števila 6, ker je 1 najmanjše naravno število.

Ker množica celih števil vsebuje tudi vsa negativna števila, omejitev pri odštevanju ni več. Od poljubnega celega števila lahko odštejemo katero koli celo število in je rezultat spet celo število.

Odštevanje v množici celih števil je notranja računska operacija.

Odštevanje je prištevanje nasprotne vrednosti: $a - b = a + (-b)$.

Zgled

Kaj lahko povemo o deljenju v množici celih števil? Ali je deljenje v množici $\mathbb{Z}$ notranja računska operacija?

Če delimo na primer število 20 s 5, dobimo rezultat 4. Takoj pa najdemo primer (20 : 6), ko se »deljenje ne izide«. Iz tega zaključimo, da deljenje ni notranja računska operacija v množici celih števil.

V množici celih števil lahko izvajamo tri notranje računske operacije, in sicer seštevanje, odštevanje in množenje.

Za seštevanje in množenje v množici celih števil velja pet osnovnih računskih zakonov (zakon o zamenjavi seštevancev in množencev, zakon o združevanju seštevancev in množencev ter zakon o razčlenjevanju).

3.6 Seštevanje in odštevanje celih števil

Vsota dveh pozitivnih celih števil je pozitivno celo število.

Zgled

$(+234) + (+1256) = 234 + 1256 = 1490$

Vsota dveh negativnih celih števil je negativno celo število, ki ga izračunamo tako, da seštejemo njuni absolutni vrednosti in rezultatu pripišemo minus.

Zgled

(–234) + (–1256) = –234 – 1256 = –(234 + 1256) = –1490

Predznak vsote pozitivnega in negativnega števila je enak predznaku po absolutni vrednosti večjega števila.

Zgleda

A. (–234) + (+1256) = –234 + 1256 = +(1256 – 234) = 1022

B. (+234) + (–1256) = 234 – 1256 = –(1256 – 234) = –1022

Preizkusi zdaj!

Vsota poljubnega celega števila *a* in števila 0 je število *a*: ***a* + 0 = *a***.

Število 0 je **nevtralni element** za seštevanje.

Zgled

–234 + 0 = –234

Vsota dveh nasprotnih celih števil je enaka 0: ***a* + (–*a*) = 0**.

Zgled

234 + (–234) = 0

Naloge

11. Seštejte oziroma odštejte.

a) 13 – 34 = ______________________ **b)** –18 + 63 = ______________________

c) –210 – 460 = ______________________ **č)** –105 + 45 = ______________________

12. Odpravite oklepaje in seštejte oziroma odštejte.

a) –134 – (–134) = ______________________

b) (–321) + (–322) = ______________________

c) (–51) – (–52) = ______________________

č) (+3254) + (–5142) = ______________________

d) (+745) + (+251) = ______________________

e) 0 + (–3456) = ______________________

f) 4567 + (–4567) = ______________________

DELOVNA RAZLIČICA

13. Izračunajte vrednost izrazov.

a) (–234) – (–453) + 0 + (+673) – (+938) =

b) –12 + 15 – 34 + 37 – 45 + 48 =

14. Preverite, ali so rezultati pravilni. Napačne popravite.

a) –22 + 17 + 5 = 0

b) 208 – 394 = –114

c) 256 + 44 – 125 – 275 = 100

č) +105 – 110 + 95 – 100 = –10

d) (–2096) – (+1234) – (–3250) = –6580

15. Ines je dobila za rojstni dan 500 €. Kupila si je električni skiro, ki je stal 384 €. Starši so zahtevali, da se vpiše v tečaj varne vožnje, ki stane 75 €, in da si kupi čelado, ki stane 67 €. Ali je Ines dobila dovolj denarja, da bo lahko izpolnila obe zahtevi staršev? Odgovor utemeljite.

3.7 Množenje celih števil

Zmnožek dveh pozitivnih ali dveh negativnih celih števil je pozitivno število.

Zgleda

A. (+72) · (+13) = 72 · 13 = 936

B. (–72) · (–13) = 72 · 13 = 936

Preizkusi zdaj!

Zmnožek pozitivnega in negativnega celega števila je negativno število.

Zgleda

A. (+27) · (–31) = –27 · 31 = –837

B. (–27) · (+31) = –27 · 31 = –837

Preizkusi zdaj!

DELOVNA RAZLIČICA

Zmnožek poljubnega celega števila *a* s številom 0 je enak 0.

$$a \cdot 0 = 0$$

Zgled

$-234 \cdot 0 = 0$

Zmnožek poljubnega celega števila *a* in števila 1 je število *a*. Število 1 je **nevtralni element** za množenje.

$$a \cdot 1 = a$$

Zgled

$-234 \cdot 1 = -234$

Zmnožek poljubnega celega števila *a* in števila –1 je nasprotno število –*a*.

$$a \cdot (-1) = -a$$

Zgled

$-234 \cdot (-1) = 234$

Znak minus ima trojni pomen. Je

- znak za računsko operacijo odštevanja,
- predznak negativnega števila,
- oznaka za nasprotno vrednost danega števila.

Nalogi

16. Izračunajte.

a) $7 \cdot (-8) =$ ______________

b) $(-68) \cdot (+6) =$ ______________

c) $(-17) \cdot (-39) =$ ______________

č) $(-345) \cdot 0 \cdot 16 =$ ______________

d) $2356 \cdot (-1) =$ ______________

e) $792 \cdot (-368) =$ ______________

f) $(-4) \cdot (-234) \cdot (-25) =$ ______________

g) $1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot 5 \cdot (-6) =$ ______________

DELOVNA RAZLIČICA

17. Izračunajte.

a) $(-2)(-2)(-2)(-2) =$ ______ **b)** $(-2)(-2)(-2) =$ ______

c) $(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) =$ ______ **č)** $(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) =$ ______

Kaj ugotovite glede na število enakih faktorjev? ______

______

3.8 Številski izrazi

Pri računanju s številskimi izrazi moramo upoštevati vrstni red računskih operacij.

- Če v izrazu nastopajo seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje, najprej množimo in delimo, nato seštevamo in odštevamo.
- Če so v izrazu oklepaji, najprej izračunamo izraz v oklepaju.

Zgledi

A. $2 \cdot 4 - 6 \cdot 8 = 8 - 48 = -40$

B. $60 + 3 \cdot 2 - 24 = 60 + 6 - 24 = 66 - 24 = 42$

C. $6 - 6 \cdot (13 - 22) + (-2) = 6 - 6 \cdot (-9) - 2 = 6 + 54 - 2 = 60 - 2 = 58$

Preizkusi zdaj!

Naloga

18. Izračunajte.

a) $456 + (1267 + 23) =$

b) $112 + 224 - (40 - 37 + 146) =$

c) $2 \cdot (-8) - 3 \cdot (-9) =$

č) $32 + 8 \cdot (17 - 25) =$

d) $-5 + 3 \cdot (-18 + 3 \cdot 6) =$

e) $(-(-2 \cdot (-3) + 7) \cdot (-2) =$

19. Izračunajte.

a) $8 \cdot (-7) - 5 \cdot (16 - 6 \cdot (-8)) - (-9 - 6) =$

b) $-5 + 5(3 \cdot (-18) + 3 \cdot (-6)) =$

c) $7 \cdot (15 - 18) \cdot (56 - 52) \cdot (89 - 94) =$

č) $(8 - 5 \cdot (-7) \cdot (-9 + 6 \cdot 3)) \cdot (-4 - 3 \cdot (-1)) =$

d) $77 - 235 \cdot 23 - (13 + 22 \cdot (378 - 459) - 120) =$

Več vadim, bolje znam

1. Alja želi kupiti športne copate, ki stanejo 156 evrov. V denarnici ima 125 evrov. Ali si lahko privošči nakup? Odgovor utemeljite.

DELOVNA RAZLIČICA

2. Dopolnite preglednico.

Število	Nasprotno število	Absolutna vrednost števila
–5		
	3	
		0
–(–3)		
	+(–5)	

3. Zapišite absolutne vrednosti danih števil.

|–1| = ______ |–102| = ______ –|–23| = ______

4. Zapišite vsa števila, katerih absolutna vrednost je enaka:

3: ______ 11: ______ 55: ______

5. Primerjajte po velikosti. Vstavite znak <, > ali =.

a) 4044 ☐ 4404 **b)** –2894 ☐ –2984 **c)** 0 ☐ – 206

č) |–15| ☐ 15 **d)** –(+2353) ☐ |–2353| **e)** –(–1234) ☐ + (+1234)

6. Uredite števila po velikosti.

a) –9865, –9886, –9985, –9866, –9888, –9968

____

b) 707, 70, –712, 725, –721, –713, 777

____

7. Izračunajte.

125 + (–25) = ______ 125 – 25 = ______

25 + (–125) = ______ –125 – 25 = ______

–25 + (–125) = ______ 25 – 125 = ______

–125 + (–25) = ______ –25 – 125 = ______

V katerih primerih so rezultati enaki? Obkrožite jih z enako barvo.

8. Obkrožite črko **P** pred pravilno izjavo in črko **N** pred nepravilno izjavo.

P N Produkt pozitivnega in negativnega števila je negativno število.

P N Vsota dveh negativnih števil je negativno število.

P N Produkt sedmih negativnih faktorjev je pozitivno število.

P N Produkt –3 · (–2) · (–1) · 0 je negativno število.

DELOVNA RAZLIČICA

9. Izračunajte.

a) $-156 - 83$ **b)** $-125 + 325 - 15$

c) $-52 + (-36) - 15$ **č)** $152 - 512 + (-325)$

d) $(-2345) - (-6528) - (+1953) + (-2949)$ **e)** $(-100) - (-100) + 100 - (+100)$

10. Izračunajte.

a) $125 \cdot (-26)$ **b)** $(-23) \cdot (-132)$

c) $(-23) \cdot (-50) \cdot (-2)$ **č)** $(-15) \cdot (-7) \cdot (-45) \cdot (-6)$

d) $(-1) \cdot (+3) \cdot (-4) \cdot (+25) \cdot (-1) \cdot 5 \cdot (-2)$ **e)** $(-1) \cdot (-1) \cdot (+1) \cdot (-1) \cdot (+1) \cdot (-1)$

11. Rešite besedilne naloge.

a) Sestri Petra in Špela sta pekli piškote. Špela je naredila 64 piškotov, Petra pa 88 piškotov več kot Špela. Koliko piškotov je naredila Petra?

b) Prijatelja Mark in Maj igrata košarko »ena na ena«. Maj je dosegel 32 točk, Mark pa dvakrat več točk od njega. Koliko točk je dosegel Mark?

c) V trgovinah z igračami Pik in Pok so prodajali lego kocke. Trgovina Pok je pred božičnimi prazniki prodala 22 kompletov lego kock manj kot trgovina Pik, ta jih je prodala 151. Koliko kompletov lego kock so prodali v trgovini Pok?

č) Klemen je zbiratelj avtomobilčkov. Na sliki je le del njegove zbirke. Koliko avtomobilčkov je na sliki? Zapišite izraz, s katerim bi najhitreje izračunali število avtomobilčkov.

d) Na spodnjih slikah so prikazane vrtavke. Vsaka vrtavka ima štiri ležaje.

- Koliko ležajev imajo skupaj vrtavke na prvi sliki in koliko na drugi sliki?
- Koliko ležajev je na obeh slikah skupaj? Zapišite izraz in izračunajte njegovo vrednost.

e) Nace ima v zbirki znamk petkrat več znamk kot Bine in Tine skupaj. Bine ima 251 znamk, Tine pa ima tri komplete po 21 znamk, štiri komplete po 12 znamk in 2 kompleta po 20 znamk. Koliko znamk ima Nace?

f) Maja je imela na bančnem računu 675 evrov. Preko trajnika je poravnala položnico za elektriko v višini 112 evrov. Na razprodaji je kupila za 180 evrov oblačil in jih plačala z bančno kartico. Preko spletne banke je poravnala račun za zavarovanje avtomobila v višini 450 evrov in račun za mobilni telefon v višini 45 evrov. Kolikšno je stanje na njenem bančnem računu po teh izdatkih?

g) Gladina Mrtvega morja leži na nadmorski višini –422 m. Njegova največja globina znaša 378 m. Izračunajte nadmorsko višino najnižje točke Mrtvega morja.

h) Preden je oče kupil nov računalnik, je imel na bančnem računu 1020 evrov. Po nakupu računalnika je imel na računu 150 evrov »minusa«. Koliko je plačal za računalnik?

i) Frizerski salon Škarje je na koncu leta delavcu in dvema delavkama izplačal 1860 evrov nagrade za delovno uspešnost. Delavec je prejel 681 evrov, ena od delavk pa 452 evrov. Koliko nagrade je prejela druga delavka? Zapišite izraz, izračunajte njegovo vrednost in odgovorite na vprašanje.

j) Največja slovenska mesta po številu prebivalcev so Ljubljana, Maribor, Kranj in Celje. V letu 2016 je imela Ljubljana 279 631 prebivalcev, Maribor 94 370, Kranj 38 000 in Celje 37 787 prebivalcev. Odgovorite na vprašanja:

- Za koliko je bilo število prebivalcev v Ljubljani večje kot v Kranju?
- Za koliko je bilo število prebivalcev v Mariboru večje kot v Celju?
- Za koliko je bilo število prebivalcev v Celju manjše kot v Ljubljani?
- Za koliko je bilo število prebivalcev v Kranju manjše kot v Mariboru?

k) Vesna si želi kupiti nov mobilni telefon, zato pomaga mami v kozmetičnem salonu. Za vsako uro dela dobi 7 evrov. Prvi teden je delala 25 ur, drugi teden pa 36 ur. Koliko denarja je zaslužila?

- Obkrožite izraz, ki **ne** ustreza besedilu.

  $7 \cdot 25 + 36$ $\qquad$ $7 \cdot 25 + 7 \cdot 36$ $\qquad$ $7 \cdot (25 + 36)$

- Nov mobilni telefon, ki si ga želi Vesna, stane 350 evrov. Ali je zaslužila dovolj denarja?

l) Leta 1565 so v Švici izdelali prvi svinčnik. Koliko let je minilo od tedaj?

m) Govedo potrebuje vsak dan poleg druge hrane še 14 kg sena. Za koliko dni bo zadoščalo 3402 kg sena, če je v hlevu 9 krav?

n) Ob koncu šolskega leta je bilo pri pouku 490 dijakov, na praksi pa trije oddelki tretjega letnika srednjega poklicnega izobraževanja. V vsakem oddelku je bilo 22 dijakov. Koliko dijakov je vseh dijakov?

12. Dopolnite izjave.

a) Vrednost številskega izraza brez oklepajev izračunamo tako, da najprej ________________ in ________________, nato ________________ in ________________.

b) Vsota dveh nasprotnih celih števil je ________________.

c) Vsota pozitivnega in negativnega števila je ____________________________ ali ____________________________.

č) Rezultat pri odštevanju imenujemo ________________.

d) Za ________________ in ________________ velja zakon o zamenjavi.

DELOVNA RAZLIČICA

13. Izračunajte vrednost izraza.

a) $35 - 17 \cdot 7 + 3 \cdot 26 + 5 \cdot 0$

b) $23 - (14 \cdot 7 + 9) \cdot 17 + 1$

c) $213 + (13 - (7 \cdot 12) \cdot 25 + 191)$

č) $2 + (3 - (7 \cdot 2) \cdot 5 + 1) \cdot 4$

d) $(-113) + (+211) \cdot 33$

e) $-45 + (-23) + (+115)$

f) $(73 + 45) \cdot 25 + 28 \cdot (23 + 49)$

g) $(+325) + 55 \cdot (-37)$

h) $(-233) - (-554) + (-455) - (+556)$

i) $27 - 35(-84) - 37(45 + 78 \cdot 59) - 755$

j) $-2 + 5 \cdot 3 - (-4)(-6) + 3(-1 + 3) + 2$

k) $-12 + 5(3 -(-4)(-6) + 3(-1 + 13)) + (-2)$

14. Izračunajte vrednost izraza, ki vsebuje absolutne vrednosti.

a) $|-3| + 2 \cdot |-5| - |-3| \cdot |+5| =$

b) $|-31| - |-2| \cdot |-15| + |-71| - |-23| =$

c) $(|-5| \cdot |-13| + 3 \cdot |-11|) \cdot |-21| =$

15. Po besedilu zapišite izraz in izračunajte njegovo vrednost.

a) Produkt števil 213 in –122 zmanjšaj za –152.

b) Vsoto števil 215 in –123 povečaj 512-krat.

c) Trikratniku števila –23 prištej štirikratnik razlike števil –68 in 123.

č) Od vsote števil –583 in 295 odštej zmnožek števil 16 in –2.

d) Produkt števil 121 in –11 zmanjšaj za 7.

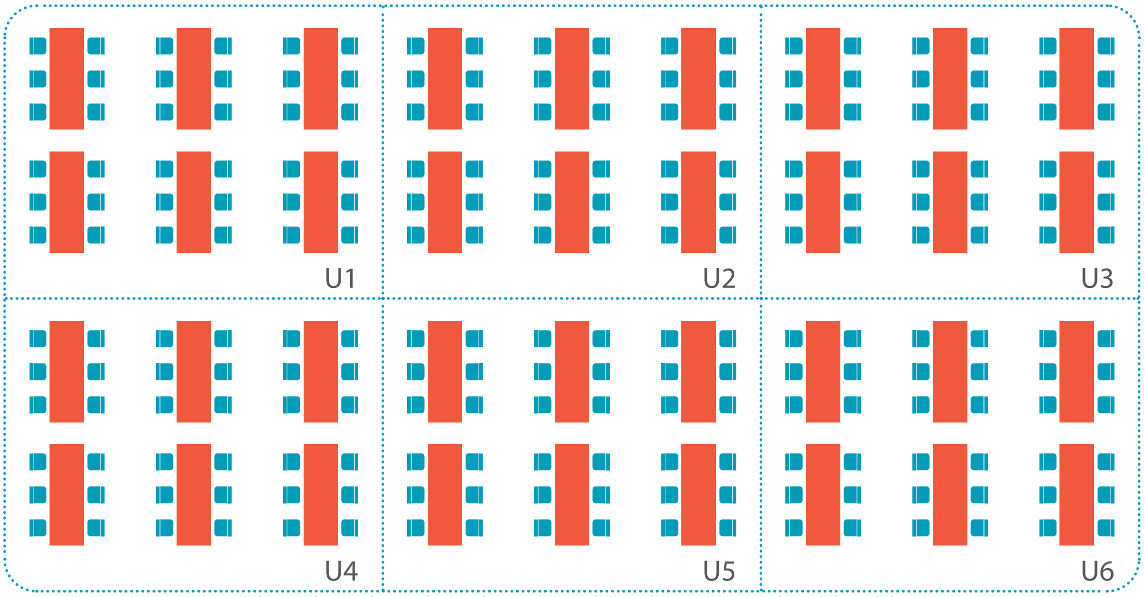
4. Potence z naravnimi eksponenti

4.1 Osnovni pojmi

Zgled

Na šoli je 6 učilnic. V vsaki učilnici je 6 klopi. Za vsako klopjo je razporejenih 6 stolov. Koliko stolov je v vseh šestih učilnicah skupaj?

V vsaki učilnici je $6 \cdot 6$ stolov. Ker je na šoli 6 učilnic, je vseh stolov na šoli $6 \cdot 6 \cdot 6$, kar lahko krajše zapišemo 6^3. Zapis 6^3 imenujemo **potenca**, njegova vrednost je $6^3 = 216$.



$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktorjev}};\ a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$$

Potenca a^n (beremo a na n) s celo osnovo a in naravnim eksponentom n je produkt n enakih faktorjev a. Eksponent n pove, kolikokrat moramo med seboj pomnožiti osnovo a.

Vrednost potence z osnovo 1 in eksponentom n je enaka 1. $1^n = 1,\ n \in \mathbb{N}$

Vrednost potence z osnovo 0 in eksponentom n je enaka 0. $0^n = 0,\ n \in \mathbb{N}$

Eksponenta 1 običajno ne pišemo. $a^1 = a,\ a \in \mathbb{Z}$

Naloge

1. Zapišite v obliki potence oziroma zmnožka potenc.

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ ________ **b)** $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) =$ ________

c) $(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) =$ ________ **č)** $3x \cdot 5y \cdot 3x \cdot 15x \cdot 5y \cdot y =$ ________

2. Potenco zapišite kot produkt.

a) $7^2 =$ ____________________ **b)** $(-4)^3 =$ ____________________

c) $a^4 =$ ____________________ **č)** $(-2b)^5 =$ ____________________

3. Izračunajte vrednost potence.

a) $3^4 =$ ________ **b)** $(-5)^3 =$ ________ **c)** $0^7 =$ ________

č) $(-1)^{19} =$ ________ **d)** $(-9)^3 =$ ________ **e)** $(-1)^9 =$ ________

4. Zapišite kot potenco s čim večjim eksponentom.

a) $9 =$ ________ **b)** $16 =$ ________

c) $-64 =$ ________ **č)** $10\,000 =$ ________

5. Izračunajte.

a) $2 \cdot 3^2 =$ ____________________

b) $-3 \cdot (-5)^3 =$ ____

c) $2^3 - 4^2 + 5^3 =$ ____

č) $(-1)^{1000} - 1^{1001} - 1^{1002} - (-1)^{1003} - (-1)^{1004} =$ ____

4.2 Pravila za računanje s potencami z naravnimi eksponenti

Zgledi

Izračunajmo račune s potencami.

A. $2^3 \cdot 2^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

B. $(2^3)^5 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3+3+3+3} = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$

C. $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$

Č. $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

D. $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

Pravila za računanje s potencami

Množenje potenc z enakimi osnovami	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $a \in \mathbb{Z}$ in $n, m \in \mathbb{N}$
Potenciranje potence	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$; $a \in \mathbb{Z}$ in $n, m \in \mathbb{N}$
Množenje potenc z enakimi eksponenti	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$; $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

Potenciranje negativne osnove

- s sodim eksponentom — $(-a)^{2n} = a^{2n}$; $a, n \in \mathbb{N}$
- z lihim eksponentom — $(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$; $a, n \in \mathbb{N}$

Zgornja pravila so zelo pomembna, zato jih zapišimo še z besedami.

Potenci z enakima osnovama zmnožimo tako, da osnovi prepišemo, eksponenta pa seštejemo.

Potenco potenciramo tako, da osnovo prepišemo, eksponenta pa zmnožimo.

Potenci z različnima osnovama in enakima eksponentoma zmnožimo tako, da osnovi zmnožimo in dobljeni produkt potenciramo z danim eksponentom.

Če je osnova potence negativno število in eksponent

- sodo število, je rezultat pozitivno število.
- liho število, je rezultat negativno število.

Nalogi

6. Zapišite kot potenco.

Preizkusi zdaj!

a) $5^3 \cdot 5^7 \cdot 5 =$ ____ **b)** $(-11)^8 \cdot (-11)^5 =$ ____

c) $2^{16} \cdot (-2)^9 =$ ____ **č)** $(7^4)^6 =$ ____

d) $((-6)^2)^7 =$ ____ **e)** $(5^2)^5 \cdot 5^4 =$ ____

f) $(-13)^7 \cdot (13^8)^3 =$ ____

g) $(2^5 \cdot 3^3)^5 \cdot 3^{10} =$ ____

7. Poenostavite.

Preizkusi zdaj!

a) $a^3 \cdot a^6 \cdot a =$ ____ **b)** $b^5 \cdot (-b)^4 \cdot b^3 \cdot (-b)^7 =$ ____

c) $c^8 \cdot (-d)^3 \cdot c^{10} \cdot (-d)^6 =$ ____ **č)** $3e^5 \cdot f^4 \cdot (-g)^2 \cdot 5f^6 \cdot (-2g)^7 =$ ____

d) $x^5(-3x^4y^5)(-3x^3y^7) =$ ____ **e)** $(u^4)^2 =$ ____

f) $(abc)^5 =$ ____ **g)** $(-2ab^3)^5 =$ ____

h) $(-3x^6y^3)^2(3x^6y)^3 =$ ____

Več vadim, bolje znam

1. Produkt zapišite kot potenco.

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$ ______

b) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) =$ ______

c) $a \cdot a \cdot a \cdot a =$ ______

č) $3x \cdot 3x \cdot 3x \cdot 3x \cdot 3x \cdot 3x =$ ______

2. Oglejte si spodnji neenakosti in ju utemeljite.

$(-3)^4 \neq -3^4$ ______

$(ab)^2 \neq ab^2$ ______

3. Potenco zapišite kot produkt.

a) $2^5 =$ ______

b) $(-4)^4 =$ ______

c) $x^6 =$ ______

č) $(-3b)^3 =$ ______

4. Dopolnite preglednico.

Potenca	Osnova	Eksponent	Vrednost potence
7^3			
	4	5	
	3		27
		4	16
$(-2)^6$			
			-8

5. Števila zapišite kot potence.

$25 =$ ______ $81 =$ ______ $100 =$ ______ $-125 =$ ______ $169 =$ ______

6. Zapišite izraz in izračunajte njegovo vrednost.

a) Kvadrat števila 9. ______

b) Kub števila 8. ______

c) Vsota kvadrata števila 6 in kuba števila 4. ______

č) Razlika števila 5^4 in kuba števila 8. ______

7. Miha je opisal zapis -2^4 tako: »–2 je osnova potence, 4 pa eksponent.«

Je njegov opis pravilen? Pojasni svoje mnenje. ______

DELOVNA RAZLIČICA

8. Vzemite kos papirja in ga čim večkrat prepolovite s prepogibanjem.

a) Kolikokrat vam je uspelo prepogniti papir? ______

Koliko plasti dobite, če papir prepognete štirikrat? ______

b) Papir je debel približno 0,5 mm. Kolikšna je debelina plasti papirja, če ga prepognete sedemkrat? ______

9. Iz osnovne šole se spomnite, kako pri pretvarjanju merskih količin uporabljamo potence števila 10 in predpone. Na primer $1000 = 10^3$ → kilo.

Poiščite vsaj štiri predpone in jih zapišite s potenco števila 10. Zapišite tudi vrednosti teh potenc.

______ ______ ______ ______

10. Upoštevajte pravila za računanje s potencami in rezultat zapišite s potenco.

a) $2^3 \cdot 2^5 \cdot 2 \cdot 2^7 \cdot 2^2 =$ ______

b) $(5^3)^5 =$ ______

c) $7^3 \cdot 2^3 =$ ______

č) $6^3 \cdot 5^2 \cdot 6^5 \cdot 5^6 =$ ______

d) $(-11)^7(-11)^{12} =$ ______

e) $(2^5 \cdot 5^5)^2 =$ ______

f) $(-2)^4 =$ ______

g) $(-7)^7 =$ ______

h) $(-1)^{2n} =$ ______

i) $(-1)^{2n-1} =$ ______

11. Poenostavite.

a) $x^6 \cdot x^5 =$ ______

b) $(x^4)^5 =$ ______

c) $((x^3)^5)^2 =$ ______

č) $(a^4)^5 \cdot a^8 =$ ______

d) $a^2b^2a^3b^4ab =$ ______

e) $(-3x^5) \cdot x^3 \cdot (-2x^4) =$ ______

f) $(-2ab^3)^5 =$ ______

g) $(-5x^3y^2)(3x^6y) =$ ______

h) $(3a)^4 3b^2 2a^3 (3b^4)^2 ab =$ ______

i) $-3^2 2^2 b^2 \cdot 2a^3 b^4 a \cdot 3b =$ ______

j) $(-2x)^3 xy^3 y(-x) =$ ______

k) $(-a^5c)^4 \cdot (-ab^2c^3) =$ ______

l) $(-2a^3b^4c)^4 \cdot (-ab^3c^5)^3 =$ ______

m) $(-a^3b^4)^2 \cdot (-ab^3)^4 \cdot (-b^6)^3 =$ ______

12. Števila $(-4)^3$, -4^3, $(+4)^3$, -4^2 in $(-4)^4$ uredite po velikosti od največjega do najmanjšega.

______

DELOVNA RAZLIČICA

13. Primerjajte po velikosti. Vstavite znak <, > ali =.

a) 3^3 ☐ 2^3 **b)** 5^2 ☐ 2^5 **c)** 4^2 ☐ 2^4

d) $-(-4)^4$ ☐ -4^4 **č)** -6^3 ☐ $(-6)^3$ **e)** $(2^3)^4$ ☐ $(2^4)^3$

14. Obkrožite črko **P** pred pravilno trditvijo in črko **N** pred nepravilno. Nepravilne trditve ustrezno popravite.

a) P N $-(-5)^{25}$ je negativno število. ______

b) P N -12^{12} je negativno število. ______

c) P N V potenci -6^3 je osnova -6 in eksponent 3. ______

č) P N $xxxx = 4x$ ______

d) P N $(x^4)^6 = x^{10}$ ______

e) P N $(3xy)^2 = 3^2x^2y^2$ ______

f) P N $x^5 + x^2 = x^7$ ______

15. Izračunajte vrednosti danih izrazov.

a) $2^5 - 3^4 =$

b) $1^5 - 5^1 =$

c) $((-2)^2)^3 - 2^5 =$

č) $(-3)^2 \cdot (-2)^3 - 2^4 =$

d) $2^3 \cdot (-4) - (-3)^1 \cdot (-6) =$

e) $(2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2) \cdot 0^4 =$

f) $3^2 \cdot (-5) + 2 \cdot (-4^2) + 18^2 =$

g) $16^2 \cdot 3 - 2^5 + 17^2 =$

h) $-4^2 + (-12)^2 + 11^2 \cdot (-1) =$

i) $(-1)^{2023} - (-1)^{2024} + (-1)^{2025} - (-1)^{2026} =$

j) $(-1)^{2023} \cdot (-1)^{2024} \cdot (-1)^{2025} \cdot (-1)^{2026} =$

5. Deljivost naravnih in celih števil

5.1 Večkratniki in delitelji naravnih števil

Zgled

Žan, Rok, Tim in Jan so se odločili, da bodo v letošnjem šolskem letu zbirali sličice nogometašev in jih lepili v album. V vsakem paketu je 5 sličic.

Žan je zbral 14 paketov, Rok 8, Tim 10 in Jan 12.

Izračunajmo, koliko sličic imajo.

Žan $14 \cdot 5 = 70$, Rok $8 \cdot 5 = 40$, Tim $10 \cdot 5 = 50$ in Jan $12 \cdot 5 = 60$. Števila sličic, ki jih imajo fantje, so večkratniki števila 5.

Zapišimo večkratnike števila 5: $V_5 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30 \ldots\}$.

Večkratnike naravnega števila a dobimo z množenjem tega števila z vsemi naravnimi števili. Množico večkratnikov naravnega števila a označimo z $\boldsymbol{V_a}$. Najmanjši večkratnik števila a je število sàmo, največjega večkratnika danega števila a ni, saj je naravnih števil in s tem tudi večkratnikov števila a neskončno mnogo.

Naloga

1. V trgovino z gradbenim materialom je prispelo 84 škatel z vijaki, žebljički in maticami. Škatle so razvrstili na police tako, da jih je na vsaki polici enako.

a) Na vsaki polici je 12 škatel. Koliko polic so napolnili? ______________________

b) Ali bi bilo mogoče enakomerno razvrstiti škatle, tako da bi bilo na vsaki polici 21 škatel? Koliko polic bi potrebovali v tem primeru? ______________________

c) Koliko polic bi še lahko imeli v trgovini, da bi lahko enakomerno razvrstili vse škatle? __________

Rezultate imenujemo ______________________ števila 84.

Zapišite vse delitelje števila 84 v obliki množice: $D_{84} = \{$______________________$\}$

Delitelji naravnega števila a so vsa naravna števila, ki delijo dano število a. Množico deliteljev naravnega števila a označimo z $\boldsymbol{D_a}$. Najmanjši delitelj vsakega naravnega števila je 1. Največji delitelj vsakega naravnega števila je število sàmo. Deliteljev danega števila a je končno mnogo.

DELOVNA RAZLIČICA

Naloge

2. Zapišite prvih pet večkratnikov števil 8, 12, 45 in 72.

Večkratniki števila 8 so: ________________________________.

Večkratniki števila 45 so: ________________________________.

Večkratniki števila 12 so: ________________________________.

Večkratniki števila 72 so: ________________________________.

3. Ali je število 1548 večkratnik števila 18? Odgovor utemeljite.

____

4. Zapišite vse delitelje števil 15, 24, 31 in 48.

Delitelji števila 15 so: ________________________________.

Delitelji števila 31 so: ________________________________.

Delitelji števila 24 so: ________________________________.

Delitelji števila 48 so: ________________________________.

5. Ali je število 24 delitelj števila 1362? Odgovor utemeljite.

____

5.2 Kriteriji deljivosti

Pri iskanju deliteljev danega števila si pomagamo s kriteriji za deljivost.
Se jih spomnite iz osnovne šole?

Naloga

6. S katerimi od števil 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 in 10 je deljivo število 123 456? ________________

Kriteriji deljivosti

Število je deljivo z:

2, če je enica števila deljiva z 2 (oz. če je število sodo),
3, če je vsota števk števila deljiva s 3,
4, če je dvomestni konec števila deljiv s 4,
5, če je enica števila enaka 0 ali 5,
6, če je število deljivo z 2 in 3 hkrati,
8, če je trimestni konec števila deljiv z 8,
9, če je vsota števk števila deljiva z 9,
10, če je enica števila enaka 0.

Zgled

S kriteriji deljivosti poiščimo vse delitelje števila 3761*a*.

Vrednost števila je odvisna od izbire enice a, za katero imamo deset možnosti.

Število 3761*a* je deljivo z:

- 2, če je na mestu enic števka 0, 2, 4, 6 ali 8, zato je $a = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
- 3, če je vsota vseh števk deljiva s 3. Seštejemo števke: $3 + 7 + 6 + 1 + a = 17 + a$. S številom 3 so deljiva števila $18 = 17 + 1$, $21 = 17 + 4$ in $24 = 17 + 7$, zato je $a = \{1, 4, 7\}$.
- 4, če je dvomestni konec deljiv s 4, zato je $a = \{2, 6\}$.
- 5, če je na mestu enic števka 0 ali 5, zato je $a = \{0, 5\}$.
- 6, če je dano število deljivo z 2 in 3 hkrati, zato je $a = 4$.
- 8, če je tromestni konec deljiv z 8. Število 616 je deljivo z 8, torej mora veljati $a = 6$.
- 9, če je vsota vseh števk deljiva z 9. Seštejemo števke: $3 + 7 + 6 + 1 + a = 17 + a$. S številom 9 je deljivo število $18 = 17 + 1$, zato je $a = 1$.
- 10, če je na mestu enic števka 0. Torej $a = 0$.

Nalogi

7. S kriteriji deljivosti ugotovite, katera izmed števil 46, 84, 225, 519, 1398 in 2024 so deljiva z 2, 3, 4, 5, 6, 8 in 9. Označi s kljukico.

Delitelj/število	46	84	225	519	1398	2024
2						
3						
4						
5						
6						
8						
9						

8. Poiščite vse možnosti za števko a, da bo število 674*a* deljivo z

a) 2: ____________________ **b)** 3: ____________________

c) 4: ____________________ **č)** 6: ____________________

5.3 Praštevila in sestavljena števila

Zgled

Zapišimo delitelje prvih 12 naravnih števil.

$D_1 = \{1\}$ $D_5 = \{1, 5\}$ $D_9 = \{1, 3, 9\}$

$D_2 = \{1, 2\}$ $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ $D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$

$D_3 = \{1, 3\}$ $D_7 = \{1, 7\}$ $D_{11} = \{1, 11\}$

$D_4 = \{1, 2, 4\}$ $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$ $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Glede na **število deliteljev** delimo naravna števila v tri skupine.

Število 1 ni niti praštevilo niti sestavljeno število, saj ima samo enega delitelja (sebe).	**Praštevila** so števila, ki imajo natanko dva delitelja, in sicer 1 in samega sebe. Najmanjše praštevilo je število 2 in je edino sodo praštevilo. Praštevil je neskončno mnogo.	**Sestavljena števila** so števila, ki imajo tri delitelje ali več.

5.4 Razcep sestavljenih števil na prafaktorje – osnovni izrek aritmetike

Vsako sestavljeno število lahko na en sam način zapišemo kot produkt praštevil oziroma potenc praštevil.

Zgled

Razcepimo števila na prafaktorje.

Preizkusi zdaj!

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$

$63 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$

$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$2450 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2450 & 2 \\ 1225 & 5 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Nalogi

Preizkusi zdaj!

9. S postopkom za iskanje praštevil, ki ga po starogrškem matematiku Eratostenu imenujemo **Eratostenovo sito**, poiščite praštevila med prvimi sto naravnimi števili.

Obkrožite najmanjše praštevilo in prečrtajte vse njegove večkratnike. Ponovno obkrožite prvo neprečrtano število, saj je praštevilo, in nato prečrtajte vse njegove večkratnike. Postopek ponavljajte.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	43	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Kako s skupnim imenom imenujemo vsa obkrožena števila? ______________________

Kako imenujemo vsa prečrtana števila? ______________________

Število 1 ni niti obkroženo niti prečrtano. Zakaj? ______________________

DELOVNA RAZLIČICA

10. Števila 36, 112, 186, 450 in 3060 razcepite na prafaktorje.

36 | 112 | 186 | 450 | 3060 |

5.5 Osnovni izrek o deljenju

Zgled

Poglejmo, kakšni so možni ostanki pri deljenju s številom 4.

$24 : 4 = 6$, ker je $24 = 6 \cdot 4$
0 ost.

$25 : 4 = 6$, ker je $25 = 6 \cdot 4 + 1$
1 ost.

$26 : 4 = 6$, ker je $26 = 6 \cdot 4 + 2$
2 ost.

$27 : 4 = 6$, ker je $27 = 6 \cdot 4 + 3$
3 ost.

$28 : 4 = 7$, ker je $28 = 7 \cdot 4$
0 ost.

$29 : 4 = 7$, ker je $29 = 7 \cdot 4 + 1$
1 ost.

Pri deljenju s 4 so možni ostanki 0, 1, 2 in 3.

Če naravno število n delimo z naravnim številom m ($n \geq m$), se lahko deljenje izide ali pa ne.

- Kadar se **deljenje izide** (ostanek pri deljenju je enak nič), število m **deli** število n, kar krajše zapišemo $\boldsymbol{m \mid n}$. Rečemo tudi, da sta števili n in m v **relaciji deljivosti**.
  Če število m deli število n, je n **večkratnik** števila m, kar krajše zapišemo $\boldsymbol{n = k \cdot m}$. Število k je **količnik** (kvocient) pri deljenju.
- Kadar se deljenje ne izide, dobimo poleg količnika tudi **ostanek**, ki je večji od 0 in manjši od delitelja.

Vse te ugotovitve združimo v osnovni izrek o deljenju.

Osnovni izrek o deljenju

Za naravni števili n in m, pri čemer je $n \geq m$, velja: $\boldsymbol{n = km + r}$; $k \in \mathbb{N}$ in $0 \leq r < m$.

Število n je deljenec, m je delitelj, k je količnik in r je ostanek.

Zgled

Ugotovimo, ali sta števili 234 in 9 v relaciji deljivosti. Kaj pa števili 2345 in 9?
Za oba para števil zapišimo osnovni izrek o deljenju.

234 : 9 = 26
 54
  0 ost.

Števili 234 in 9 sta v relaciji deljivosti, kar zapišemo 9 | 234 oziroma po osnovnem izreku o deljenju: $234 = 26 \cdot 9$.

2345 : 9 = 260
 54
  05
   5 ost.

Števili 2345 in 9 nista v relaciji deljivosti, saj pri deljenju poleg količnika 260 dobimo ostanek 5; $2345 = 260 \cdot 9 + 5$.

Naloge

11. Za dani števili zapišite osnovni izrek o deljenju. Obkrožite črke pred števili, ki so v relaciji deljivosti.

a) 7 in 54 ______________________

b) 9 in 954 ______________________

c) 13 in 234 ______________________

č) 56 in 1298 ______________________

d) 72 in 3468 ______________________

12. Kateri so možni ostanki pri deljenju z 8? ______________________

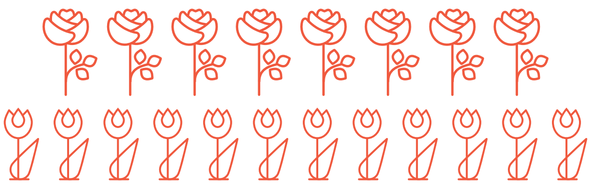
13. Neko naravno število smo delili s 16 in dobili količnik 19 ter ostanek 3. Katero število smo delili s 16? ______________

5.6 Največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik

Zgled

Na razpolago imamo 8 vrtnic in 12 tulipanov. Radi bi naredili šopke, enake po številu posameznih rož. Največ koliko jih lahko naredimo, da porabimo vse rože?

Pomagamo si z razcepom obeh števil.



$8 = 1 \cdot 8$ $\quad$ $12 = 1 \cdot 12$

$8 = 2 \cdot 4$ $\quad$ $12 = 2 \cdot 6$

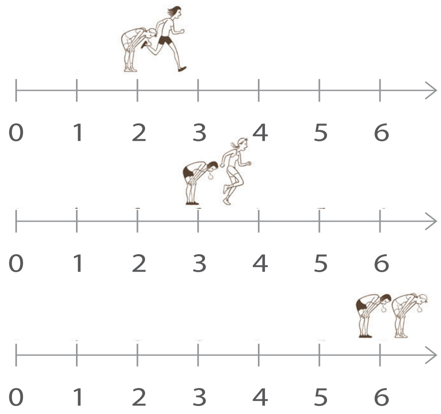
$12 = 3 \cdot 4$

Naredimo lahko največ štiri enake šopke, saj je število 4 največji skupni delitelj obeh števil.

Naravni števili *a* in *b* imata končno mnogo skupnih deliteljev, največjega med njimi imenujemo **največji skupni delitelj** in označimo z ***D*(*a*, *b*)**. To je največje število**,** ki hkrati deli števili *a* in *b*. Če je $D(a, b) = 1$, sta števili *a* in *b* **tuji števili**.

Zgled

Maja in Anja sta tekli na isti progi. Anja se je ustavila vsaka 2 km, Maja pa vsake 3 km.



Obe sta se ustavili 6 km, 12 km, 18 km … od starta, saj so števila 6, 12, 18 … večkratniki števil 2 in 3. Njun prvi skupni premor je bil 6 km po startu, saj je število 6 najmanjši skupni večkratnik števil 2 in 3.

Najmanjši skupni večkratnik števil *a* in *b* je najmanjše od števil**,** ki so deljiva s **številoma** *a* in *b* hkrati.

Največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik dveh naravnih števil *a* in *b* povezuje formula

$$D(a, b) \cdot v(a, b) = a \cdot b.$$

Največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik dveh naravnih števil lahko poiščemo na tri načine:

- z naštevanjem deliteljev oziroma večkratnikov,
- z razcepom na prafaktorje,
- z Evklidovim algoritmom.

Zgleda

A. Poiščimo največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik števil 12 in 16 tako, da zapišemo njune delitelje oziroma večkratnike.

$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$D_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$
Najprej izpišimo vse skupne delitelje: 1, 2, 4.
Največji med njimi je število 4, kar zapišemo $D(12, 16) = 4$.

$V_{12} = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144 \ldots\}$
$V_{16} = \{16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128, 144 \ldots\}$
Izpišimo še skupne večkratnike: 48, 96, 144 …
Najmanjši med njimi je število 48, kar zapišemo $v(12, 16) = 48$.

B. Z razcepom na prafaktorje poiščimo največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik števil 168 in 180.

$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$D(168, 180) = 2^2 \cdot 3 = 12$

$v(168, 180) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$

Preizkusi zdaj!

Največji skupni delitelj dveh števil je produkt vseh skupnih praštevilskih potenc z nižjim eksponentom iz obeh razcepov na prafaktorje.

Najmanjši skupni večkratnik dveh števil je produkt vseh različnih praštevilskih potenc z višjim eksponentom iz obeh razcepov na prafaktorje.

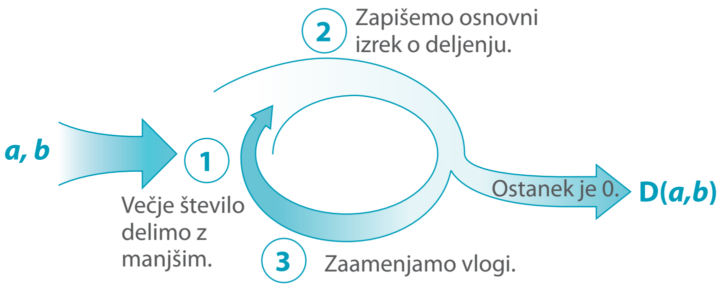
Preizkusi zdaj!

Evklidov algoritem je računski postopek za računanje največjega skupnega delitelja dveh naravnih števil. V postopku zapored uporabljamo osnovni izrek o deljenju. Uporabimo ga predvsem za iskanje največjega skupnega delitelja dveh velikih števil.

Koraki Evklidovega algoritma

1. korak Večje število delimo z manjšim.
2. korak Deljenja zapišemo z osnovnim izrekom o deljenju.
3. korak Zamenjamo vlogi – delitelj postane novi deljenec, ostanek postane novi delitelj.

Te korake ponavljamo toliko časa**,** dokler ostanek pri deljenju ni enak 0. Največji skupni delitelj danih števil je enak zadnjemu od nič različnemu ostanku v Evklidovem algoritmu.



Zgled

Z Evklidovim algoritmom izračunajmo največji skupni delitelj števil 3861 in 1430.

Delimo. $3861 : 1430 = 2$
1001 ost.

Zapišimo z osnovnim izrekom o deljenju in v naslednjem koraku zamenjajmo vlogi.

$3861 = 2 \cdot 1430 + 1001$	$1430 : 1001 = 1$ 429 ost.
$1430 = 1 \cdot 1001 + 429$	$1001 : 429 = 2$ 143 ost.
$1001 = 2 \cdot 429 + 143$ (zadnji od nič različni ostanek je iskani največji skupni delitelj D)	$429 : 143 = 3$ 0 ost.
$429 = 3 \cdot 143 + 0$	

$\boldsymbol{D(3861, 1430) = 143}$

DELOVNA RAZLIČICA

Če poznamo največji skupni delitelj dveh števil, lahko njun najmanjši skupni večkratnik izračunamo po formuli:

$$v(a, b) = \frac{a \cdot b}{D(a, b)}.$$

Zgled

$$v(3861, 1430) = \frac{3861 \cdot 1430}{143} = 38\,610$$

Naloge

14. Z naštevanjem deliteljev in večkratnikov poiščite največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik danih števil.

a) 18 in 24

$D_{18} = \{$ ________________ $\}$ $V_{18} = \{$ ________________ $\}$

$D_{24} = \{$ ________________ $\}$ $V_{24} = \{$ ________________ $\}$

$D(18, 24) =$ ____________ $v(18, 24) =$ ____________

b) 11 in 23

$D_{11} = \{$ ________________ $\}$ $V_{11} = \{$ ________________ $\}$

$D_{23} = \{$ ________________ $\}$ $V_{23} = \{$ ________________ $\}$

$D(11, 23) =$ ____________ $v(11, 23) =$ ____________

c) 8, 12 in 32

$D_{8} = \{$ ________________ $\}$ $V_{8} = \{$ ________________ $\}$

$D_{12} = \{$ ________________ $\}$ $V_{12} = \{$ ________________ $\}$

$D_{32} = \{$ ________________ $\}$ $V_{32} = \{$ ________________ $\}$

$D(8, 12, 32) =$ ____________ $v(8, 12, 32) =$ ____________

15. Z razcepom na prafaktorje poiščite največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik števil.

a) 36 in 48 **b)** 42 in 55 **c)** 112, 175 in 189

16. Z Evklidovim algoritmom poiščite največji skupni delitelj in po formuli izračunajte najmanjši skupni večkratnik števil.

a) 85 in 187 **b)** 618 in 1133

17. Aljaž in Jure sta izdelala peščeni uri. Aljaževa ura se izteče po 42 sekundah, Juretova pa po 35 sekundah.

a) Po koliko minutah se iztečeta obe uri hkrati, če ju na začetku obrneta sočasno, potem pa vsako takoj, ko se izteče?

b) Kolikokrat se v tem času izteče Aljaževa ura in kolikokrat Juretova?

18. Jani želi kovinski cevi, dolgi 1,8 m in 2,8 m, razrezati na čim daljše, enako dolge kose, brez odpadka.

a) Koliko centimetrov bo dolg posamezni kos cevi?

b) Na koliko kosov bo Jani razrezal vsako od cevi?

Več vadim, bolje znam

1. Zapišite množice večkratnikov števil 6, 15, 24 in 52.

$V_6 =$ ____________________ $V_{24} =$ ____________________

$V_{15} =$ ____________________ $V_{52} =$ ____________________

2. Ali je število 2340 večkratnik števila 65? Odgovor utemeljite.

____

3. Zapišite vse delitelje števil 8, 18, 29 in 72.

$D_8 =$ ____________________ $D_{29} =$ ____________________

$D_{18} =$ ____________________ $D_{72} =$ ____________________

4. Dopolnite.

$V_8 = \{8, \_\_, \_\_, \_\_, 40\ \_\_, 48 \ldots\}$ $V_{\square} = \{\_\_, \_\_, 21, \_\_, 35, \_\_ \ldots\}$

$D_{36} = \{1, \_\_, \_\_, 4, \_\_, 9, \_\_, \_\_, 36\}$ $D_{\square} = \{1, \_\_, \_\_, 4, 6, \_\_, \_\_, \_\_\}$

DELOVNA RAZLIČICA

5. Izpolnite preglednico. S kljukico označite delitelje. Uporabite kriterije za deljivost.

Delitelj/število	46	84	225	340	519	1398	2024	4500
2								
3								
4								
5								
6								
9								
10								

6. Zapišite vsa naravna števila, večja od 48 in manjša od 98, ki so deljiva s 5.

____

7. Zapišite najmanjše in največje trimestno število, ki je deljivo s 6.

Najmanjše: ______________ Največje: ______________

8. Poiščite vse vrednosti števke a, da bo število $123a8$ deljivo z

a) 2 ______________ **č)** 5 ______________

b) 3 ______________ **d)** 6 ______________

c) 4 ______________ **e)** 9 ______________

9. Obkrožite praštevila.

27 37 51 52 59 93 101 111 131

10. Zapišite vsa praštevila med 50 in 70. ______________

11. Števila 48, 128, 210, 512 in 1456 razcepite na prafaktorje.

DELOVNA RAZLIČICA

12. Zapišite osnovni izrek o deljenju za dani števili. Ali sta kateri števili v relaciji deljivosti? Zapišite s simboli.

a) 12 in 65 ____________________

b) 23 in 1234 ____________________

c) 72 in 3240 ____________________

Relacija deljivosti: ____________________

13. S katerim naravnim številom dobimo pri deljenju s 15 količnik 7 in ostanek 12?

____

14. Zapišite najmanjše in največje naravno število, s katerim dobimo pri deljenju z 9 količnik 18.

Najmanjše: ____________________ Največje: ____________________

15. Z naštevanjem deliteljev poiščite in zapišite vse skupne delitelje števil.

a) 15 in 21

$D_{15} =$ __________

$D_{21} =$ __________

$D_{15} \cap D_{21} =$ __________

b) 42 in 48

$D_{42} =$ __________

$D_{48} =$ __________

$D_{42} \cap D_{48} =$ __________

c) 12, 18 in 48

$D_{12} =$ __________

$D_{18} =$ __________

$D_{48} =$ __________

$D_{12} \cap D_{18} \cap D_{48} =$ __________

16. Z naštevanjem večkratnikov poiščite najmanjši skupni večkratnik danih števil. Zapišite štiri skupne večkratnike števil.

a) 6 in 8 **b)** 20 in 24 **c)** 18, 27 in 36

17. Dana števila razcepite na prafaktorje in poiščite najmanjši skupni večkratnik in največji skupni delitelj.

a) 36, 63 **c)** 102, 156 **d)** 504, 540

b) 120, 150 **č)** 320, 248 **e)** 160, 175

DELOVNA RAZLIČICA

18. Zapišite največja skupna delitelja oziroma najmanjša skupna večkratnika.

a) $D(128, 256) =$ ______________ **c)** $v(55, 66) =$ ______________

b) $D(194, 288) =$ ______________ **č)** $v(148, 324) =$ ______________

19. Uporabite Evklidov algoritem in izračunajte največji skupni delitelj danih števil. Uporabite formulo in izračunajte še njun najmanjši skupni večkratnik.

a) 437 in 483 **b)** 703 in 665 **c)** 1635 in 1853 **č)** 254 in 5124

20. V pravilnem vrstnem redu oštevilčite korake Evklidovega algoritma.

____ Ponavljajmo postopek, dokler ostanek ni enak 0.

____ Večje število delimo z manjšim.

____ Zamenjamo vlogi: delitelj postane novi deljenec, ostanek postane novi delitelj.

____ Zapišimo deljenje z osnovnim izrekom o deljenju.

____ $D(a, b)$ je enak zadnjemu od nič različnemu ostanku.

21. Dopolnite izjave.

a) Če je $D(a, b) = 1$, števili a in b imenujemo ______________.

b) Najmanjši skupni večkratnik dveh tujih števil je enak ______________.

c) Sestavljena števila lahko razcepimo na ______________.

č) Praštevila imajo ______________ delitelja, in sicer ______________ in ______________.

d) Število 1 ni niti praštevilo niti ______________.

22. Rešite besedilne naloge.

a) Imamo dve nitki, prva je dolga 225 cm, druga pa je 20 cm krajša od prve. Obe nitki razrežemo na manjše koščke (brez odpadka). Koliko naj bodo dolgi koščki nitk, da bodo čim daljši in enako dolgi? Koliko koščkov bomo dobili?

b) Kaja in Klara skačeta po hodniku. Kaja preskoči 5 ploščic, Klara pa 6 ploščic. Katero ploščico bosta preskočili obe hkrati?

c) Nadja vsakih 20 dni zamenja vodo v akvariju in vsakih 56 dni opere rastline v vodi. Danes je naredila oboje. Čez koliko dni bo znova naredila oboje?

č) Brata Tim in Jan sta se odločila, da bosta pomagala pri gospodinjskih opravilih in pri delu okrog hiše. Tim vsake 4 dni posesa in pomije tla, Jan pa vsakih 7 dni pokosi travo. Danes sta delala oba. Čez koliko dni bosta znova opravljala delo skupaj?

d) Komunala Kranj se je odločila, da bo smetnjake odvažala v enakomernih časovnih presledkih. Vsakih 14 dni bodo odpeljali smetnjake z embalažo, vsakih 21 dni smetnjake z ostalimi odpadki in vsakih 7 dni biološke odpadke. Danes so spraznili vse tri smetnjake. Čez koliko časa bodo znova spraznili vse tri smetnjake v istem dnevu?

e) Mati je na praznovanju hčerinega rojstnega dne med otroke razdelila 72 čokoladnih in 60 sadnih mini slaščic ter 48 sokov.

- Koliko otrok je bilo na praznovanju, če so vsi pojedli enako število čokoladnih in sadnih mini slaščic ter popili enako število sokov?
- Koliko čokoladnih in sadnih mini slaščic je pojedel vsak otrok? Koliko sokov je popil?

f) Oče in stric sta za kondicijski trening opravila nekaj voženj okoli bližnjega jezera – oče s kolesom, stric z rolerji. Oče je prevozil en krog v 15 minutah, stric pa v 25 minutah. Čez koliko minut sta bila znova oba skupaj na začetni točki, če sta startala sočasno? Koliko krogov je do takrat prevozil oče in koliko stric?

g) Na sliki je primer zobniškega gonila. Prvi (gnani) zobnik ima 42 zob, drugi (pogonski) pa 21 zob. Kolikokrat je treba zavrteti drugi zobnik, da se bosta oba vnovič znašla v začetni legi?

h) Sosede Ana, Maja in Tina hodijo v isti frizerski salon. Ana prihaja vsakih 20 dni, Maja vsakih 24 dni in Tina vsakih 30 dni. Nazadnje so bile vse tri v frizerskem salonu 15. novembra. Kdaj se bodo znova srečale v frizerskem salonu?

∗ **i)** Vnuki so pomagali obirati jabolka. V zahvalo jim je babica želela dati nekaj jabolk za domov. Če bi dala vsakemu vnuku osem jabolk, bi ji štiri jabolka ostala. Če pa bi dala vsakemu vnuku devet jabolk, bi ji 3 jabolka zmanjkala. Koliko vnukov je pomagalo babici in koliko jabolk jim je želela razdeliti?

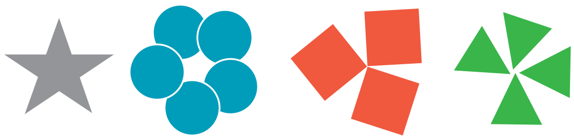
6. Algebrski izrazi

6.1 Osnovni pojmi

Zgled

Sestavili bomo verigo iz različnih snežink. Potrebovali bomo 5 krogov, 3 kvadrate, 4 trikotnike in zvezdico. Zlepili bomo posamezne skladne like in iz njih sestavili verigo, kot je prikazano na sliki.

Za izdelavo zvezdice potrebujemo x papirja, za krogec y, za kvadrat z in za trikotnik w.



x $\quad 5 \cdot y$ $\quad 3 \cdot z$ $\quad 4 \cdot w$

Ko sestavimo verigo iz vseh zgoraj naštetih elementov, lahko porabo papirja zapišemo z algebrskim izrazom: $x + 5y + 3z + 4w$.

Če se odločimo, da bo $x = 9$ cm², $y = 4$ cm², $z = 4$ cm² in $w = 6$ cm², lahko izračunamo vrednost izraza oziroma ploščino papirja, ki ga porabimo za izdelavo.

$x + 5y + 3z + 4w = 9\text{ cm}^2 + 5 \cdot 4\text{ cm}^2 + 3 \cdot 4\text{ cm}^2 + 4 \cdot 6\text{ cm}^2 = 65\text{ cm}^2$

Za verigo potrebujemo najmanj 65 cm² papirja.

Algebrski izraz je zapis, sestavljen iz števil in spremenljivk (črk), ki jih smiselno povezujejo znaki za računske operacije, pri čemer lahko vrstni red računskih operacij določajo tudi oklepaji.

Če namesto spremenljivk vstavimo števila, dobimo številski izraz in lahko izračunamo **vrednost izraza**.

Odvisno od števila spremenljivk, ki so ob številih v algebrskem izrazu, govorimo o izrazih **ene, dveh, treh … (več) spremenljivk**.

Zgledi

A. Izračunajmo vrednost izraza $3x - 2y + 5$ za $x = -2$ in $y = 3$.

$3 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 + 5 = -6 - 6 + 5 = -7$

B. Zapišimo primer izraza z eno spremenljivko. $\quad -3x^2 + 4x$

C. Zapišimo primer izraza z dvema spremenljivkama. $\quad 5x - 3y$

Pisanje izrazov s spremenljivkami poenostavimo tako, da v nekaterih primerih **izpustimo znak za množenje**, na primer:

- med številom in spremenljivko $5 \cdot a \to 5a$
- med dvema spremenljivkama $a \cdot b \to ab$
- med številom in oklepajem $3 \cdot (a + 5) \to 3(a + 5)$
- med spremenljivko in oklepajem $a \cdot (b - 2) \to a(b - 2)$
- med dvema oklepajema $(a + 2) \cdot (b - 3) \to (a + 2)(b - 3)$

DELOVNA RAZLIČICA

Glede na število členov, ki sestavljajo algebrski izraz, ločimo **enočlenike** in **veččlenike** (dvočlenike, tričlenike …). **Enočleniki** so algebrski izrazi, sestavljeni iz števil in črk, ki jih smiselno povezuje računska operacija **množenja**.

Zgled

Primeri enočlenikov:

- posamezna števila: $2, 15, 100, -7, \frac{7}{11}$
- posamezne spremenljivke: $a, -b, c$
- produkt spremenljivk ter *števil* in spremenljivk: $ab, -2a, 3xyz, \frac{2}{3}x, \frac{2a}{5}$
- potence: $x^3, -y^7, 2a^3b^5, -\frac{1}{2}x^5, (ab)^6$

Koeficient enočlenika je število, ki stoji pred spremenljivko.

Koeficienta 1 ne pišemo, npr. $1x = x$.

Koeficient -1 zapišemo kot $-$, npr. $-1x = -x$.

Podobni enočleniki so enočleniki, ki imajo **enake spremenljivke** (ali enak zmnožek spremenljivk) in **različne koeficiente**.

Zgleda

A. $-2x, 5x, -x, \frac{3}{5}x, 101x$ — Našteti so podobni enočleniki, ker imajo enako spremenljiko x.

B. $a^2b^3, 2a^2b^3, -5a^2b^3, \frac{2}{3}a^2b^3$ — Našteti so podobni enočleniki, ker imajo enak zmnožek spremenljivk a^2b^3 ($aabbb$).

Veččleniki so izrazi, sestavljeni iz več enočlenikov, ki jih smiselno povezujeta računski operaciji seštevanja in odštevanja.

Zgleda

A. Zapišimo nekaj primerov:

dvočlenikov: $x + 5, 2a–5b, x^3 + 2x$

tričlenikov: $a + b + c, 2x - 3y + z, 4x^3 - 3x - 7$

B. Štiričlenik pete stopnje $3 + 2x^3 - 2x^5 - 5x$ uredimo po padajočih potencah.

$-2x^5 + 2x^3 - 5x + 3$

Naloge

1. Dopolnite preglednico.

Enočlenik	Koeficient	Spremenljivke
$-2xy$		
	3	a, b
$-mno$		
$-2(-3x^2)(-5y^3)$		

2. Dopolnite preglednico.

Izraz	Število členov	Ime izraza
$3xy^2 + 5$		
$8a - 9b + c$		
$xy \cdot 7 \cdot w^3$		
$a \cdot b \cdot (-5) \cdot c$		
$-9 + xy + m^3 + u^2$		
		petčlenik
	3	

3. Dopolnite izjave.

a) Število ____________ je koeficient enočlenika $-xy$.

b) Dani izraz $3x + 5y + z$ imenujemo ______________________.

c) Število 12 je _______________ izraza $12k$.

č) Vrednost izraza $3x^2$ s spremenljivko $x = 3$ je enaka ______________________.

4. Zapišite algebrski izraz, ki ustreza besedilu.

a) Dvakratnik spremenljivke x zmanjšajte za spremenljivko y. ______________________

b) Obseg trikotnika s stranicami a, b in c. ____

c) Manja je nabrala m modrih tulipanov, r rdečih tulipanov, b belih tulipanov in v vijoličastih tulipanov. Koliko tulipanov je nabrala Manja? ________________________

6.2 Seštevanje in odštevanje algebrskih izrazov

Seštevanje in odštevanje enočlenikov

Seštevamo in odštevamo lahko samo podobne enočlenike, in sicer tako, da koeficiente seštejemo oziroma odštejemo, spremenljivke pa prepišemo.

Zgleda

Označimo podobne enočlenike in jih seštejmo oziroma odštejmo.

A. $2x + 3x^2 + 5x - 9x^2 = -6x^2 + 7x$

B. $2ab + 3c - 4c - ab = ab - c$

Seštevanje in odštevanje enočlenika in veččlenika

Enočleniku **prištejemo** veččlenik tako, da odpravimo oklepaj in ohranimo vse predznake členov v oklepaju. $a + (b + c) = a + b + c$

Enočleniku **odštejemo** veččlenik tako, da odpravimo oklepaj in spremenimo vse predznake členov v oklepaju. $a - (b + c) = a - b - c$

Zgled

Preizkusi zdaj!

Enočleniku prištejmo oziroma odštejmo dvočlenik.

$2x + (3x - 5) = 2x + 3x - 5 = 5x - 5$

$2x - (3x - 5) = 2x - 3x + 5 = -x + 5$

Seštevanje in odštevanje veččlenikov

Veččlenike seštejemo oziroma odštejemo tako, da odpravimo oklepaje in ohranimo vse predznake členov v oklepaju, če je pred oklepajem plus, oziroma spremenimo vse predznake členov v oklepaju, če je pred oklepajem minus.

$(a + b) + (c + d) = a + b + c + d$

$(a + b) - (c + d) = a + b - c - d$

Zgled

Seštejmo oziroma odštejmo veččlenike.

$(2x - 3) + (3x - 5) - (5x - 4 - 3x) = 2x - 3 + 3x - 5 - 5x + 4 + 3x = 3x - 4$

Naloge

5. Seštejte oziroma odštejte enočlenike.

a) $13x + 9y + 3x - 20y - 18x + 18y =$ ____________________

b) $3x^3 - 2x + 2x^2 - 5x^3 - 4x =$ ____________________

c) $4x - 3xy + 5xy - 4y + 3x =$ ____________________

DELOVNA RAZLIČICA

6. Seštejte oziroma odštejte enočlenik in veččlenik.

a) $2x + (7 - 3x) =$ ______

b) $(3x - x^2 + 2x^3) - 5x^2 =$ ______

c) $3ab - (7a - 2ab - 6b) =$ ______

7. Seštejte oziroma odštejte veččlenike.

a) $(45a - 12b) - (23a + 5b) + (21a - 13b) =$

b) $(5x + 3y - 6 - 2x + y - 8) - (3x - y - 1) =$

c) $(3x^3 - 2x) - (2x^2 - 5x^3 - 4x) + (-2x + 2x^2) - (-5x^3 + 2x) =$

6.3 Množenje algebrskih izrazov

Množenje enočlenika z enočlenikom

Enočlenike množimo tako, da med seboj pomnožimo koeficiente in med seboj spremenljivke. Zmnožek enakih spremenljivk zapišemo s potenco.

Zgled

Zmnožimo: $2 \cdot x \cdot 4 \cdot y \cdot z \cdot z \cdot x = 8x^2yz^2$.

Množenje enočlenika z veččlenikom

Enočlenik množimo z veččlenikom tako, da z enočlenikom pomnožimo vsak člen veččlenika.

$$a(b + c) = ab + ac$$

Zgleda

Zmnožimo.

A. $3x \cdot (x + y) = 3x \cdot x + 3x \cdot y = 3x^2 + 3xy$

B. $(3a + 2bc - 4d) \cdot 8 = 24a + 16bc - 32d$

Množenje veččlenika z veččlenikom

Veččlenik množimo z veččlenikom tako, da vsak člen prvega veččlenika pomnožimo z vsakim členom drugega veččlenika.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

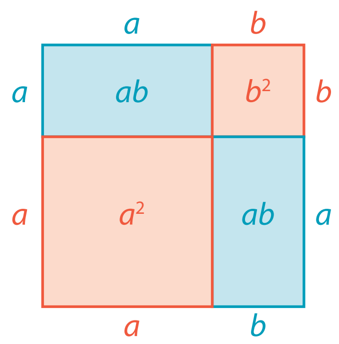
Zgled

Preizkusi zdaj!

Zmnožimo dvočlenika.

$(3x - 2y) \cdot (u + 3v) = \boxed{3x \cdot u}\ \boxed{+ 3x \cdot 3v}\ \boxed{- 2y \cdot u}\ \boxed{- 2y \cdot 3v} = 3xu + 3xv - 2yu - 6yv$

Kvadriranje dvočlenika



Kvadrat vsote

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) =$

$= a^2 + ab + ba + b^2 =$

$= a^2 + 2ab + b^2$

Kvadrat razlike

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) =$

$= a^2 - ab - ba - b^2 =$

$= a^2 - 2ab - b^2$

Kvadrat dvočlenika je vsota treh členov: kvadrata prvega člena, dvakratnika produkta prvega in drugega člena ter kvadrata drugega člena.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Zgleda

A. $(x + 2y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

B. $(8x - 1)^2 = (8x)^2 - 2 \cdot 8x \cdot 1 + 1^2 = 64x^2 - 16x + 1$

Množenje vsote in razlike dveh enakih členov

Zmnožek vsote in razlike dveh enakih členov je enak razliki kvadratov obeh členov.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

DELOVNA RAZLIČICA

Zgleda

A. $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

B. $(2x + 1)(2x - 1) = 4x^2 - 1$

Naloge

8. Zmnožite enočlenike.

a) $4a^2 \cdot 5b^2 =$ ______

b) $3x^3 \cdot 7z =$ ______

c) $15x^2 \cdot (-7y^3) \cdot (-3z) =$ ______

č) $36x^2y \cdot (-7xy^3) =$ ______

d) $64ab \cdot 15xy^2 =$ ______

e) $18a^3b^2 \cdot (-24)(-a)(-b) =$ ______

9. Zmnožite enočlenik z veččlenikom.

a) $2(x + 9) =$ ______

b) $(4x - 8y + 5z) \cdot 2u =$ ______

c) $(4p^2 - 6p - 5) \cdot 3p =$ ______

č) $-7m^2 \cdot (-5m^3 - 8m^2 + 4m - 9) =$ ______

d) $(2a^2b - 7ab^2)(-5ab) =$ ______

e) $(-8m^2y - 9my^2 + 5my)(-7m^2y) =$ ______

10. Zmnožite veččlenik z veččlenikom.

a) $(a - b)(3a - 4b) =$

b) $(3a^2 - 15a)(12a^2 + 18a) =$

c) $(4a^2 - 3ab + 5b^2)(5a^2 - 7ab + 8b^2) =$

č) $(3x^3 - 2x + 2x^2)(-5x^3 - 4x) =$

d) $(a + b - c + d)(a - b + c) =$

e) $(2x^3 + 2x^2 + 5x + 13)(5x^3 + 2x^2 - 8) =$

DELOVNA RAZLIČICA

11. Obkrožite črko pred pravilno trditvijo.

a) Pri kvadriranju dvočlenika je

(A) prvi člen rezultata enak kvadratu prvega člena dvočlenika.

(B) zadnji člen rezultata enak drugemu členu dvočlenika.

(C) osrednji člen rezultata enak produktu prvega in drugega člena dvočlenika.

(Č) osrednji člen rezultata enak dvakratniku produkta prvega in drugega člena dvočlenika.

b) (prvi člen + drugi člen)^2 je

(A) (prvi člen)^2 + prvi člen · drugi člen + (drugi člen)^2.

(B) (prvi člen)^2 + (drugi člen)^2.

(C) (prvi člen)^2 + 2 · prvi člen · drugi člen + (drugi člen)^2.

12. Kvadrirajte.

a) $(x - 3y)^2 =$ ______

b) $(4u + 2v)^2 =$ ______

c) $(2mn - 3u)^2 =$ ______

č) $(xyz - mn)^2 =$ ______

d) $(c^6 - d^5)^2 =$ ______

e) $(6u^3 + 7v)^2 =$ ______

f) $(3mn^5 - 5m^4n)^2 =$ ______

13. Zmnožite.

a) $(a - 2b)(a + 2b) =$ ______

b) $(-3x + 4y)(3x + 4y) =$ ______

c) $(-x + 2xy)(-x - 2xy) =$ ______

č) $(2x^2 + 4y)(2x^2 - 4y) =$ ______

d) $(a^3 - b^4)(a^3 + b^4) =$ ______

6.4 Razstavljanje algebrskih izrazov

Izpostavljanje skupnega faktorja

Če vsi členi veččlenika vsebujejo enak faktor, ta skupni faktor izpostavimo in tako vsoto (razliko) preoblikujemo v zmnožek.

$$ab \pm ac = a(b \pm c)$$

Med potencami z isto osnovo lahko izpostavimo le faktor z najnižjo stopnjo.

Zgledi

Izpostavimo skupni faktor.

A. $4ac - 8ab = 4a(c - 2b)$

B. $3x^4 + 12x^5y = 3x^4(1 + 4xy)$

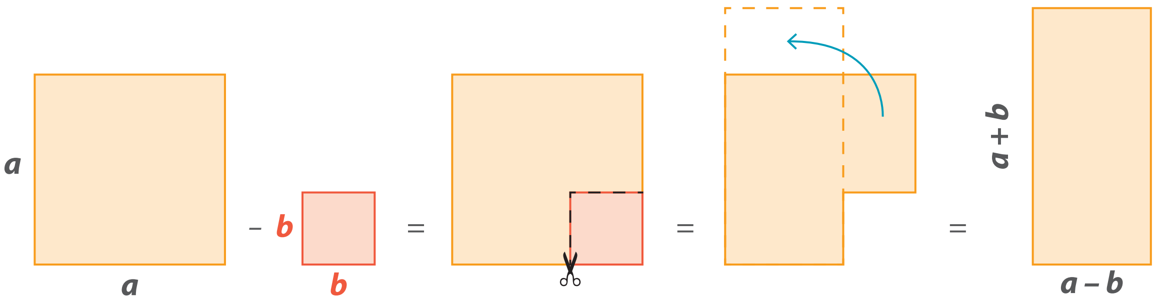
C. $4x^2y^2 - 12x^3y^3 + 16x^4y^4 = 4x^2y^2(1 - 3xy + 4x^2y^2)$

Č. $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = x^2(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 3)$

Razlika kvadratov

Razliko kvadratov dveh členov zapišemo kot produkt vsote in razlike dveh enakih členov.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$



Zgledi

Razstavimo.

A. $a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$

B. $64x^2 - 144 = (8x - 12)(8x + 12)$

* **C.** $x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$

Č. $a^2 + b^2$ V množici realnih števil $\mathbb{R}$ vsote kvadratov ne moremo razstaviti.

Kvadrat dvočlenika (popolni kvadrat)

Pomagali si bomo z že znanima formulama za kvadriranje vsote in razlike dveh členov.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Zgledi

Razstavimo.

A. $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

B. $b^2 - 6b + 9 = (b - 3)^2$

C. $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$

Č. $36a^2 - 12a + 1 = (6a - 1)^2$

Vìètovo pravilo

Kvadratni tričlenik oblike $x^2 + Ax + B$ želimo razstaviti kot zmnožek dveh dvočlenikov $(x + a)(x + b)$. Poiskati moramo taki števili a in b, katerih vsota je enaka koeficientu A, njun zmnožek pa prostemu členu B.

$$x^2 + Ax + B = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b) + ab$$

$$A = a + b,\ B = a \cdot b$$

Zgledi

Razstavimo.

Preizkusi zdaj!

A. $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$, ker je $2 + 3 = 5$ in $2 \cdot 3 = 6$

B. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, ker je $(-2) + (-3) = -5$ in $(-2) \cdot (-3) = 6$

C. $x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$, ker je $6 + (-1) = -5$ in $6 \cdot (-1) = -6$

Č. $x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$, ker je $(-6) + 1 = -5$ in $(-6) \cdot 1 = -6$

Naloge

Preizkusi zdaj!

14. Izpostavite skupni faktor.

a) $5a + 5b =$ ______________________

b) $9a^2 + 10a^2b^2 =$ ______________________

c) $am - an =$ ______________________

č) $6ab + 7a^2 =$ ______________________

d) $4x^2z - 5xy =$ ______________________

e) $4xy + 12x^3y^2 =$ ______________________

f) $13a^3 + 14a^2 + 7a =$ ______________________

g) $6x^3y - 9x^2y^2 =$ ______________________

h) $-15m^2 + 45m^3 =$ ______________________

i) $-3x^4 + 12x^5a =$ ______________________

j) $-6x^4y^3 + 15x^2y^4 - 9x^3y^5 =$ ____

***15.** V izrazu $c^2d^2 + 2cd - 10bcd - 20b$ izpostavite skupni faktor.

____

____

16. Razstavite razlike kvadratov.

a) $p^2 - r^2 =$ ______________

b) $225m^2 - 121n^2 =$ ______________

c) $1 - 9x^2 =$ ______________

č) $36a^2 - b^4 =$ ______________

d) $x^4 - 25y^6 =$ ______________

***e)** $16 - x^4 =$ ______________

17. Zapišite kot kvadrat dvočlenika.

a) $9x^2 - 12x + 4 =$ ______________

b) $a^2 + 10a + 25 =$ ______________

c) $16y^2 - 40y + 25 =$ ______________

***č)** $36x^2 - 84xy + 49y^2 =$ ______________

18. Razstavite po Viètovem pravilu.

Preizkusi zdaj!

a) $x^2 + 10x + 21 =$ ______________

b) $y^2 - 8y + 15 =$ ______________

c) $x^2 + 5x - 24 =$ ______________

č) $x^2 - 7x - 30 =$ ______________

d) $x^2 - x - 110 =$ ______________

***e)** $x^2 + 11xy - 12y^2 =$ ______________

Več vadim, bolje znam

1. Zapišite koeficiente danih enočlenikov.

Enočlenik	$7x$	ab^2	$-5m^3$	$-2a^2b$	$-x^3y^2$	abc
Koeficient						

2. Z algebrskim izrazom zapišite izjavo.

a) Vsota števila 7 in spremenljivke *b*. ______________

b) Za 9 povečana spremenljivka *a*. ______________

c) Dvakratnik spremenljivke *m*. ______________

č) Vsota trikratnika spremenljivke *y* in dvakratnika spremenljivke *x*. ______________

d) Petkratnik za 4 povečane spremenljivke *b*. ______________

3. Dan je veččlenik $x^4 - 5x^7 - 2 + 8x^3$.

a) Veččlenik uredite. ______________

b) Izpišite vodilni člen: ________, stopnjo veččlenika: ________ in prosti člen: ________.

4. Poenostavite izraze.

a) $3a + 6a + 12 =$ ______________

b) $13x^2 + 2x - 5x^2 =$ ______________

c) $14a - 9b - 2a + 7b =$ ______________

č) $7x^2 - 3x + x^3 - 5x - 7x^2 - 5x^3 =$ ______________

DELOVNA RAZLIČICA

5. Odpravite oklepaje in poenostavite izraze.

a) $4a - 19b - (a + 5b) =$

b) $(4x^2 - 3x) - (x^3 - 2x) - (-3x^2 + 4x^3) =$

c) $3m - 7n - 3(5n - 2m) =$

č) $(x + 5y)5 + 24x - 4(x + 2y) =$

d) $5x + 9 - 4(3y + 8) + 3(x + 9y + 7) + 6x + 1 =$

6. Poenostavite izraze in za dane vrednosti spremenljivk izračunajte vrednosti naslednjih izrazov.

a) $2(x + 3y) - 4(2x - y)$; za $x = -3$ in $y = 4$

b) $3(2x - y) - 4(x + y) + 2(4x + 3y)$; za $x = 1$ in $y = -1$

c) $a^3 - 5a^2 + (2b - a^2) + 7b(3b - a)$; za $a = -2$ in $b = -4$

č) $8y - 2(4y + 7x) - 5(3(2x - y) - 6y - 2(8x - 3y))$; za $x = -5$ in $y = 2$

7. Odpravite oklepaje.

a) $2(3a + 8)$

b) $7(x + 3y)$

c) $z(v + 2)$

č) $12c(2 + 4d + e)$

d) $(x + 1)(y + 2)$

e) $(a + 8)(b + 10)$

f) $(12 + 5x)(2y + 9)$

g) $(5x + 6y)(7w + 8v)$

h) $2a(a - 3)(a + 5)$

i) $(3x - 7y)(3x + 7y)$

* **8.** Za vsako nadaljevanje trditve presodite, ali je pravilna ali napačna. Obkrožite pravilne trditve in dopišite po en primer.

Ko pomnožimo dvočlenik z dvočlenikom, je rezultat:

(A) dvočlenik ______________________

(B) tričlenik ______________________

(C) štiričlenik ______________________

(Č) petčlenik ______________________

9. Poenostavite izraze.

a) $8x^2yz \cdot (-9xy^2z^2) =$

b) $-5ab \cdot (-12a^2b^2c^4) =$

c) $(5ab + 6) \cdot 3a =$

č) $-4x^2(2x - y) =$

d) $(4x + 5y)(2x - 3y) =$

e) $(-2a + 3)(3a - 2a) =$

f) $(4x - 1)(5x^3 - 2x^2 + 3) =$

g) $(-x^3y^2)^3 \cdot (-3xy)^2 =$

10. Kvadrirajte.

a) $(a + 5)^2 =$

b) $(2x - 3)^2 =$

c) $(m - 3n)^2 =$

č) $(7a + 8b)^2 =$

d) $(5ab - 3c)^2 =$

e) $(u^3 + 4v^2)^2 =$

f) $(abc - 3de)^2 =$

g) $(a^5 - b^3)^2 =$

11. Uporabite ustrezno formulo in zmnožite.

a) $(x - 5)(x + 5) =$

b) $(1 - y)(1 + y) =$

c) $(x^2 - 3)(x^2 + 3) =$

č) $(mn - 16)(mn + 16) =$

d) $(u - 9v)(u + 9v) =$

e) $(17 + 4m)(17 - 4m) =$

12. Izpostavite skupni faktor.

a) $2b + 6 =$

b) $3c + 9 =$

c) $5d + 20 =$

č) $20e + 10 =$

d) $12ab + 16ac =$

e) $70xy + 35 =$

f) $15xy^2 + 17x^2 =$

g) $30ab + 15bc =$

13. Izpostavite skupni faktor.

a) $24b^4 + 48b^2 - 12b$

b) $14a^5b^6 + 7a^3b^9$

c) $12a^6b^4 - 15a^7b^3 + 15a^4b^4$

č) $30m^3n^2 - 6m^5n + 42m^4n$

* **d)** $5x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x$

* **e)** $x^3 - 5x^2 - 4x + 20$

14. Razstavite razlike kvadratov.

a) $a^2 - 4b^2 =$ ______

b) $1 - c^2 =$ ______

c) $25m^2 - 49n^2 =$ ______

č) $64 - 81x^2 =$ ______

d) $169u^2 - 49v^2 =$ ______

e) $100 - b^4 =$ ______

*__f)__ $x^4 - 16y^4 =$ ______

15. Razstavite po Viètovem pravilu.

a) $x^2 + 4x - 5 =$ ______

b) $x^2 - 5x - 36 =$ ______

c) $x^2 + 7x + 10 =$ ______

č) $x^2 + 14x + 48 =$ ______

d) $y^2 - y - 12 =$ ______

e) $y^2 - 9y + 18 =$ ______

f) $y^2 - 10y + 24 =$ ______

g) $z^2 + 18z - 40 =$ ______

h) $a^2 - 16a + 64 =$ ______

i) $m^2 + 6mn + 9n^2 =$ ______

*__16.__ Razstavite.

a) $81a^8 - 1 =$ ______

b) $x^5y^2 - 16x^3y^4 =$ ______

c) $-4a^4 + 100 =$ ______

č) $36u^4 - 64u^2v^2 =$ ______

d) $2z^3 - 10z^2 - 72z =$ ______

e) $-3c^2 - 21cd + 54d^2 =$ ______

f) $5y^6 - 30y^3 + 45 =$ ______

g) $4a^2 + 28a + 49 =$ ______

17. Poenostavite izraze in razstavite rezultate, če je možno.

a) $(3x - y)(3x + y) + 2(2x - y)^2 - 5x(3x - 2y) - y(4x + y)$

b) $(2x + 3y)(2x - 3y) - (2x + y)^2 + 4x(x - 2y) + 5y(3x + 2y)$

c) $(x - 3)^2 - 5(x - 7)(x + 7) + 7x(x - 1) - 11(x + 20) + 14$

č) $(x + 5)^2 - 6(x - 4)(x + 4) + 7x(x - 6) + 7$

d) $(x + 2)^2 - 2x(x - 4) + (x - 3)(x + 3) + 1$

18. Poenostavite izraz in nato izračunajte vrednost izraza za $x = -2$.

$(x + 3)(x - 2) + 2x(x - 3) + 5x$

19. Poenostavite izraz in nato izračunajte vrednost izraza za $a = 3$.

$(3a - 5)^2 - 2(6 - 5a)(6 + 5a) - a(a - 3)$