

Kvadratna enačba

1. Definicija kvadratne enačbe
2. Reševanje kvadratne enačbe
3. Število rešitev kvadratne enačbe
4. Uporaba kvadratne enačbe



rešiti kvadratno enačbo
s pomočjo razstavljanja
ali izračuna rešitev
po obrazcih

določiti število rešitev
glede na diskriminanto

ZNALI BOMO

predstaviti kvadratno
odvisnost z enačbo

uporabiti kvadratno
enačbo pri reševanju
realnih problemov



1. Definicija kvadratne enačbe

Zgled

Produkt dveh zaporednih celih števil je enak 12. Poiščimo števili.



Najprej zapišemo dve zaporedni celi števili.

1. število: x

2. število: $x + 1$

Nato zapišemo enačbo: $x(x + 1) = 12$

Enačbo preoblikujemo: $x^2 + x = 12 \quad /-12$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

Razstavimo z Viètovim pravilom: $(x - 3)(x + 4) = 0$

Zmnožek je enak nič, če je vsaj eden od faktorjev enak nič. Linearna faktorja enačimo z nič in dobimo dve rešitvi.

Rešitev 1

in

Rešitev 2

$$x - 3 = 0$$

$$x + 4 = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -4$$

1. število: $x = 3$

1. število: $x = -4$

2. število: $x + 1 = 3 + 1 = 4$

2. število: $x + 1 = -4 + 1 = -3$

Preizkus: $3 \cdot 4 = 12$

Preizkus: $(-4) \cdot (-3) = 12$

Po preoblikovanju začetne enačbe smo dobili enačbo oblike $x^2 + x - 12 = 0$.

Tako enačbo imenujemo kvadratna enačba. Prepoznamo jo po 2. stopnji neznanke.

Kvadratna enačba je enačba, ki jo lahko preoblikujemo v $ax^2 + bx + c = 0$, kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$ in $a \neq 0$.

Pri tem člene in koeficiente kvadratne enačbe imenujemo:

ax^2 – vodilni člen a – vodilni koeficient

bx – linearni člen b – koeficient linearnega člena

c – prosti člen

Veliko procesov in življenjskih situacij se da opisati s kvadratno enačbo. Čeprav je še ne znamo rešiti, pogledimo primer take enačbe.

Zgled

Dolžina zavorne poti je odvisna od mnogih dejavnikov: reakcijskega časa voznika, vremenskih razmer, pnevmatik, cestišča in koeficienta trenja.

Kadar želimo izračunati zavorno pot, upoštevamo, da je približno sorazmerna s kvadratom hitrosti.

$$s = \frac{1}{2gk} \cdot v^2$$

s – dolžina zavorne poti
 g – gravitacijski pospešek
 k – koeficient trenja
 v – hitrost vožnje



Zapišimo vodilni koeficient in koeficient linearne člena ter prosti člen kvadratne enačbe, pri kateri je hitrost neznanka.

Kvadratna enačba z neznanko v ima obliko $av^2 + bv + c = 0$. V našem primeru velja:

$$\frac{1}{2gk} \cdot v^2 - s = 0. \text{ Torej je:}$$

- vodilni koeficient enačbe $a = \frac{1}{2gk}$,
- koeficient linearne člena $b = 0$,
- prosti člen $c = -s$.

Naloge

1. Obkrožite kvadratne enačbe.

$$x^2 + 5x = 2$$

$$y^2 - 1,7 = 0$$

$$\frac{m^2}{2} + 7m - 12 = 0$$

$$\frac{2}{m^2} + m = 0$$

$$7^2x^3 + x = 0$$

$$v(v - 2) = 7$$

$$15a^2 + 15a$$

$$4(x + 4) - x(x + 4) = 2$$

$$\frac{13}{n^2} = 1$$

2. Zapišite kvadratno enačbo, ki ustreza besedilu.

a) Produkt dveh zaporednih lihi števil je enak 63. _____

b) Ploščina pravokotnika je enaka 48 cm^2 . Izračunajte dolžino stranic, če veste, da je ena stranica trikratnik druge. _____

3. Zapišite kvadratno enačbo s koeficienti $a = 2$, $b = 1$ in $c = 3$.



2. Reševanje kvadratne enačbe

Kvadratno enačbo rešujemo tako, da jo postopoma preoblikujemo v zapis $ax^2 + bx + c = 0$.

Kvadratno enačbo lahko rešimo z razstavljanjem ali s pomočjo obrazcev.

Pri razstavljanju izraz na levi stran enačbe zapišemo kot produkt linearnih faktorjev, ki je enak 0, če je vsaj eden od faktorjev enak 0.

Če izraza na levi strani enačbe ne moremo razstaviti, rešitvi kvadratne enačbe izračunamo s pomočjo obrazcev.

Najprej izračunamo diskriminanto: $D = b^2 - 4ac$

in nato rešitvi enačbe: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ in $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Zgleda

A. S pomočjo razstavljanja rešimo kvadratno enačbo.

a) $5x^2 + 7x + 4 = 3x^2 + x$

$$5x^2 - 3x^2 + 7x - x + 4 = 0$$

$$2x^2 + 6x + 4 = 0 \quad / : 2$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x + 2)(x + 1) = 0$$

$$x + 2 = 0 \quad \text{in} \quad x + 1 = 0$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = -1$$

Vse člene prenesemo na levo stran enačbe.

Enačbo uredimo.

Obe strani enačbe delimo z 2.

Uporabimo Vietovo pravilo.

b) $5x^2 + 8x + 7 = 7 - 2x^2$

$$5x^2 + 2x^2 + 8x + 7 - 7 = 0$$

$$7x^2 + 8x = 0$$

$$x(7x + 8) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{in} \quad 7x + 8 = 0$$

$$7x = -8 \quad / : 7$$

$$x_2 = -\frac{8}{7}$$

Vse člene prenesemo na levo stran enačbe.

Izpostavimo skupni faktor.

c) $x^2 = 121$

$$x^2 - 121 = 0$$

$$(x - 11)(x + 11) = 0$$

$$x - 11 = 0 \quad \text{in} \quad x + 11 = 0$$

$$x_1 = 11 \quad x_2 = -11$$

Vse člene prenesemo na levo stran enačbe.

Razstavimo po formuli za razliko kvadratov.

- B.** S pomočjo obrazcev za izračun rešitev kvadratne enačbe rešimo kvadratno enačbo $2x^2 + x = 3$.

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$a = 2, b = 1, c = -3$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)$$

$$D = 25$$

Vse člene prenesemo na levo stran enačbe.

Izpišemo koeficiente.

Uporabimo obrazec za diskriminanto.

Nato uporabimo obrazca za rešitvi x_1 in x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{in} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} \quad x_2 = 1$$

Naloge

- 4.** Rešite kvadratno enačbo z razstavljanjem.

a) $x^2 + 9x = 0$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $x^2 + 2x + 1 = 0$

č) $x^2 = 16$

d) $-x^2 = -2x + 1$

e) $-36 + x^2 = 0$

f) $x^2 - 11x + 30 = 0$

g) $x^2 - 120 = 2x$

h) $x^2 + 5x - 11 = 6x + 9$

i) $2x^2 + 16x + 30 = 0$

j) $3x^2 + 8x - 12 = 2x^2 + 8x + 4$

k) $2(x + 3)(x - 2) = x^2 + x$

5. Rešite kvadratno enačbo.

a) $3x^2 + 2x - 1 = 0$

b) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

c) $2x^2 + 18x + 20 = -4x^2 + 90x - 100$

č) $(x - 1)^2 = 3(x - 1) - 2$

d) $(3 - 4x)^2 - 15 = 2(3 - 4x)$

e) $(2x + 1)(x - 5) + 12 = x(x - 1)$

f) $(2x - 3)^2 - 4(2x + 3) + 12 = 0$

g) $4x^2 - 7 = 1 - x(x + 3)$

h) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{x+7}{2} = \frac{(x+1)^2}{2}$

i) $\frac{(2x-7)(2x+7)}{6} - \frac{(3x-5)^2}{6} = \frac{x(8-2x)}{3} - \frac{26}{6}$

6. Zapišite kvadratno enačbo s koeficienti $a = 2$, $b = -18$ in $c = 16$ in jo rešite.

7. Zapišite vsaj dve kvadratni enačbi, ki imata rešitvi enaki 2 in -5 .



3. Število rešitev kvadratne enačbe

Število rešitev kvadratne enačbe je odvisno od velikosti diskriminante D .

Če je $D > 0$, ima enačba dve različni realni rešitvi.

Če je $D = 0$, ima enačba eno dvojno realno rešitev.

Če je $D < 0$, enačba nima realnih rešitev.

Če vstavimo negativno število pod kvadratni koren, ne dobimo rešitve, saj ne obstaja tako realno število, da je njegov kvadrat negativen.

Zgleda

A. Preverimo ali sta -2 in 1 rešitvi kvadratne enačbe $3x^2 + x = 10$.

Vstavimo -2 v levo in desno stran enačbe in izračunamo obe vrednosti.

$$L: 3 \cdot (-2)^2 + (-2) = 10$$

$$D: 10$$

$$L = D$$

Ker sta leva in desna stran enačbe enaki, je število -2 rešitev enačbe.

Vstavimo 1 v levo in desno stran enačbe in izračunamo obe vrednosti.

$$L: 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$$

$$D: 10$$

$$L \neq D$$

Ker leva in desna stran enačbe nista enaki, število 1 ni rešitev enačbe.

B. Preverimo, koliko rešitev ima kvadratna enačba, in jih izračunajmo.

a) $2x^2 + 11x - 6 = 0$

$$a = 2, b = 11, c = -6$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)$$

$$D = 121 + 48$$

$$D = 169$$

Ker je $D > 0$, ima enačba dve rešitvi.

Uporabimo obrazca za izračun rešitev kvadratne enačbe:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

in

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-11 - \sqrt{169}}{2 \cdot 2}$$

$$x_2 = \frac{-11 + \sqrt{169}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

b) $2x^2 - 5x + 26 = x^2 + 5x + 1$

$$2x^2 - x^2 - 5x - 5x + 26 - 1 = 0$$

Preoblikujemo kvadratno enačbo.

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$a = 1, b = -10, c = 25$$

Izpišemo koeficiente.

$$D = b^2 - 4ac$$

Izračunamo diskriminanto.

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25$$

$$D = 100 - 100 = 0$$

Ker je $D = 0$, ima enačba eno dvojno rešitev.

Uporabimo obrazca za izračun rešitev kvadratne enačbe:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

in

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$$

$$x_2 = \frac{-(-10) + \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 5$$

Dvojno rešitev krajše zapišemo $x_{1,2} = 5$.

Pri tem primeru bi lahko levo stran enačbe zapisali tudi kot kvadrat dvočlenika:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$(x - 5)(x - 5) = 0$$

$$(x - 5)^2 = 0$$

$$x - 5 = 0$$

$$x_{1,2} = 5$$

c) $6x^2 + 7x + 9 = 0$

$$a = 6, b = 7, c = 9$$

Izpišemo koeficiente.

$$D = b^2 - 4ac$$

Izračunamo diskriminanto.

$$D = 7^2 - 4 \cdot 6 \cdot 9$$

$$D = 49 - 216$$

$$D = -167$$

Ker je $D < 0$, enačba nima realne rešitve.

Nalogi

8. Ali je katero od števil $-3, \frac{1}{2}$ ali 4 rešitev enačbe $6x^2 + 10x - 10 = 2x^2 - 4$?

9. Ugotovite število realnih rešitev enačbe in enačbo tudi rešite.

a) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

b) $m^2 - 144 = 0$

c) $2x^2 + 11x - 21 = 0$

č) $(a + 5)(4 - a) + (a + 5)^2 = 2$

d) $4x^2 + 7x = 3(x^2 - 5)$

e) $\frac{3x^2}{4} + \frac{x}{2} = \frac{5}{4}$

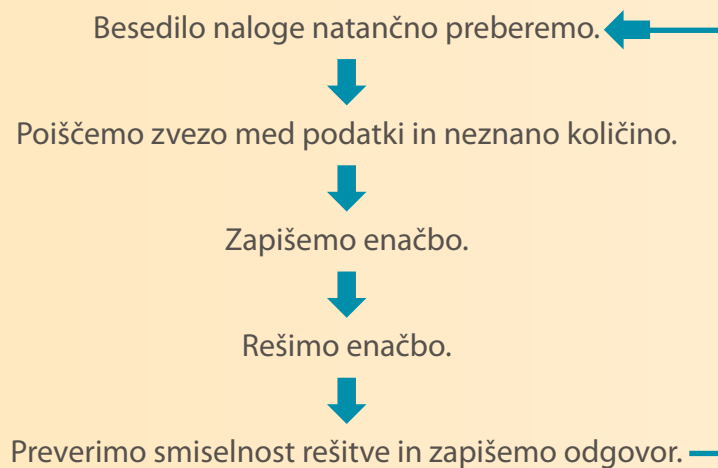
f) $\frac{5x^2}{3} + \frac{7x}{5} = \frac{11}{15}$

g) $(3x - 2)^2 = 2 - (x - 2)^2$



4. Uporaba kvadratne enačbe

Pogledali si bomo nekaj situacij, ki jih lahko rešimo z uporabo kvadratne enačbe. Naučili se bomo poiskati neznanko in zapisati enačbo, ki ustreza besedilu. Pri tem bomo sledili naslednjim korakom:



Zgled

A. Vsota kvadratov treh zaporednih naravnih števil je 365. Poiščimo ta tri števila.

Zapišimo tri zaporedna naravna števila:

1. število: n

2. število: $n + 1$

3. število: $n + 2$

Zapišimo enačbo in jo rešimo:

$$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = 365$$

$$n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 - 365 = 0$$

$$3n^2 + 6n - 360 = 0 \quad / : 3$$

$$n^2 + 2n - 120 = 0$$

$$(n + 12)(n - 10) = 0$$

$$n + 12 = 0 \quad \text{in} \quad n - 10 = 0$$

$$\cancel{n_1 = -12} \quad n_2 = 10$$

Rešitev $n_1 = -12$ ni ustrezna, ker število -12 ni naravno število.

Rešitev $n_2 = 10$ je ustrezna.

1. število: $n = 10$

2. število: $n + 1 = 11$

3. število: $n + 2 = 12$

$$\text{Preizkus: } 10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$$

Iskana naravna števila so 10, 11 in 12.

- B.** V pravokotnem trikotniku se dolžini katet a in b razlikujeta za 2 cm, hipotenuza c pa meri 10 cm. Izračunajmo dolžini katet.

Zapišemo povezave med dolžinami stranic.

$$a - b = 2 \text{ cm}$$

$$c = 10 \text{ cm}$$

Iz povezave med dolžinama katet lahko kateto a izrazimo s kateto b .

$$a = b + 2 \text{ cm}$$

Zapišemo enačbo, ki povezuje dolžine stranic pravokotnega trikotnika in jo rešimo.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$10^2 = (b + 2)^2 + b^2$$

$$100 = b^2 + 4b + 4 + b^2$$

$$0 = 2b^2 + 4b + 4 - 100$$

$$2b^2 + 4b - 96 = 0 \quad / : 2$$

$$b^2 + 2b - 48 = 0$$

$$(b_1 + 8)(b_2 - 6) = 0$$

$$b_1 + 8 = 0 \quad \text{in} \quad b_2 - 6 = 0$$

$$\cancel{b_1 = -8} \quad b_2 = 6$$

Rešitev $b_1 = -8$ ni smiselna, saj dolžina ne more biti negativna.

Rešitev $b_2 = 6$ je ustrezna.

Dolžini katet sta:

$$b = 6 \text{ cm}$$

$$a = b + 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

Nalogi

- 10.** Vsota kvadratov treh zaporednih sodih števil je enaka 1736. Katera števila so to?

- 11.** Ploščina pravokotnika meri 96 dm^2 . Stranica a je za 4 cm daljša od stranice b . Zapišite enačbo in izračunajte dolžini stranic pravokotnika.



Več vadam bolje znam

1. Dopolnite preglednico tako, da boste za kvadratno enačbo izpisali vodilni koeficient, linearni člen in prosti člen.

Kvadratna enačba	$-x^2 + 3 = 0$	$5x^2 + 7 = 5x$	$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 7 = 0$	$\sqrt{3}x^2 + \frac{1}{3}x = 0$
Vodilni koeficient				
Linearni člen				
Prosti člen				

2. Obkrožite kvadratne enačbe.

$$x^2 + 7 = 15x$$

$$\frac{3}{x^2} - 5 = 7x$$

$$\frac{x^2}{5} - 3 = 5x$$

$$x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

$$x + 7 = 12x - 3$$

$$2x^3 + 1 = 6x$$

3. Ali je število $-1,2$ rešitev danih kvadratnih enačb? _____

Obkrožite kvadratni enačb, katerih dvojna rešitev je $-1,2$.

$$x^2 - 5x = -6,2x$$

$$5x + 7,44 = -x^2$$

$$x^2 = -x + 0,24$$

4. Zapišite kvadratno enačbo, ki ustreza besedilu, in jo rešite.

a) Produkt dveh zaporednih lihih števil je enak 35.

b) Vsota kvadrata nekega števila in njegovega naslednika je enaka 31.

c) Ploščina pravokotnega trikotnika meri 33 cm^2 . Ena kateta je za 5 cm daljša od druge.

5. Rešite kvadratno enačbo s pomočjo razstavljanja.

a) $x^2 + 3x = 0$

b) $x^2 + 5x - 36 = 0$

c) $x^2 = 81$

č) $x^2 - x - 6 = 0$

d) $x^2 + 6x + 9 = 0$

e) $x^2 - x - 49 = 0$

f) $3x^2 - 27x + 60 = 0$

g) $x^2 + 8x - 20 = 0$

h) $-5x = x^2$

i) $5x + 4 = x^2 + 5x$

j) $x^2 - 2x = -5x + 40$

k) $x^2 + 13x - 25 = 15x + 10$

6. Rešite kvadratno enačbo.

a) $4x^2 + 7x - 2 = 0$

b) $4x^2 + 9x = 90$

c) $\frac{1}{4}(x^2 + 4) = \frac{3}{4}x$

č) $450x^2 + 360x = -72$

d) $x^2 + \frac{1}{4}x = \frac{1}{2}$

e) $0,2x^2 + 0,5x + 0,3 = 0$

f) $(x - 1)^2 = (x - 2)^2 + (x - 3)^2$

g) $\frac{x^2 - 1}{3} - \frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(x + 3)^2}{8} = 3x$

7. Ugotovite, koliko realnih rešitev ima enačba in jo rešite.

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$

b) $\frac{1}{2}x^2 = 2x + 3$

c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

č) $3x^2 - 12x + 35 = 0$



8. Rešite kvadratno enačbo

a) $4m(m + 5) - (3m - 5)(3m + 5) = 54 - (2m - 7)^2$

b) $(2y - 3)^2 + (2y - 5)^2 - 30 = 4(y - 3)^2$

c) $\frac{(a-1)^2}{2} - \frac{2a-3}{3} = \left(\frac{a(a-1)}{3} + \frac{(a-1)(a+1)}{2} \right) - 2$

č) $(3x - 2)^2 = 2 - (x - 2)^2$

d) $(1 + 4x)^2 - x + (3x - 1)^2 = 11 - (x - 2)^2$

e) $(x + 2)(4x + 11) + 4 = (x + 2)(x + 4)$

f) $(x + 3)^2 - (x - 5)(x + 4) = (x + 4)^2 - 3$

g) $\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$

h) $\frac{(x-1)^2}{3} - x + 1 = \frac{4}{3}$

i) $(x - 3)(x + 1) = \frac{(x+1)^2}{2} - 12$



9. Rešite besedilne naloge.

- a)** Število 31 zapišite kot vsoto dveh števil, katerih produkt je enak 238.
- b)** Ploščina pravokotnika meri 63 cm^2 . Koliko merita stranici pravokotnika, če je ena stranica za 2 cm daljša od druge?
- c)** Produkt dveh zaporednih sodih števil je enak 360. Kateri števili sta to?
- č)** Ploščina romba meri 96 cm^2 . Koliko merita diagonali tega romba, če je ena diagonalna za 4 cm krajša od druge?
- d)** Koliko oglišč ima konveksni večkotnik z 252 diagonalami?
- e)** Kolikšna je dolžina ograja okrog zemljišča pravokotne oblike, če je dolžina zemljišča 15 m krajša od širine? Površina zemljišča meri 4500 m^2 .
- f)** Neža ima na gredi pravokotne oblike posajenih 624 sadik jagod, razporejenih v vrste. Koliko sadik jagod je razporejenih po dolžini in koliko po širini grede, če sta po dolžini grede posajeni 2 sadiki več kot po širini? Sadike so po dolžini in širini enako oddaljene ena od druge.
- g)** Stroški izleta za dijake 3. letnika srednje šole so bili 19 320 €. Ker so štirje dijaki zboleli, so morali ostali dijaki plačati 40 € več na osebo. Koliko dijakov je odšlo na izlet? Koliko so morali dijaki plačati za izlet?
- h)** Dolžini robov večje in manjše škatle v obliki kocke se razlikujeta za 4 cm, površini pa za 1056 cm^2 . Koliko merita robova škatel?